

结构化非凸张量低秩稀疏分解

模型、算法与应用研究

— 博士学位论文答辩 —

答辩人： 余 泉
指导教师： 白敏茹 教授

湖南大学 · 数学学院

2026 年 4 月 23 日



- 1 绪论
- 2 主要研究工作
- 3 结论与展望
- 4 攻读学位期间的学术或实践成果



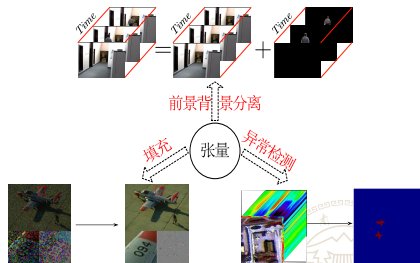
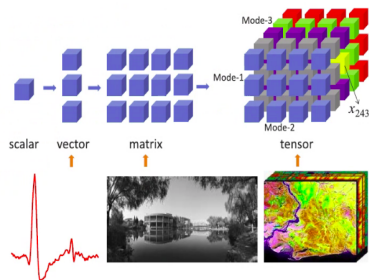
目录

- 1 绪论
 - 研究背景与意义
 - 国内外研究现状
 - 本文的主要研究内容与创新
- 2 主要研究工作
- 3 结论与展望
- 4 攻读学位期间的学术或实践成果



研究背景：高维数据与张量表示

- **数据特征**：现实世界数据维度攀升、结构日益复杂。
- **传统局限**：基于向量或矩阵的重排/展开处理会造成**结构信息丢失**。
- **张量优势**：作为高维数据的自然表示，能够建立多维关系，完整保留内在结构。
- **广泛应用**：图像修复、前景-背景分离、高光谱异常检测、交通数据分析等。



核心科学问题：张量低秩稀疏分解

核心问题挑战

真实世界数据常受噪声、遮挡或异常目标干扰。如何从复杂观测中精准、高效地分离背景与异常？

观测数据 $\mathcal{X} = \text{低秩分量 } \mathcal{L} \text{ (背景)} + \text{稀疏分量 } \mathcal{S} \text{ (异常/噪声)}$

典型应用场景：

- **高光谱遥感**：复杂背景与异常目标（伪装设施、局部作物病害）的分离。
- **计算机视觉**：鲁棒图像对齐。
- **智能交通**：时空数据重构与突发交通异常事件检测。



目录

- 1 绪论
 - 研究背景与意义
 - 国内外研究现状
 - 本文的主要研究内容与创新
- 2 主要研究工作
- 3 结论与展望
- 4 攻读学位期间的学术或实践成果



国内外研究现状：基础模型

基础模型 (TRPCA):

$$\min_{\mathcal{L}, \mathcal{S}} \text{rank}(\mathcal{L}) + \lambda \|\mathcal{S}\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} = \mathcal{L} + \mathcal{S}.$$

策略 1: 凸松弛

代表方法: 核范数、 l_1 范数

固有局限: 会过度惩罚较大奇异值或大幅值稀疏系数, 存在**理论估计偏差**。

策略 2: 非凸松弛

代表方法: l_p 范数、MCP、SCAD

方法优势: 函数形态更尖锐, 减弱过度惩罚, 实现**近似无偏估计**, 重构精度更优。

策略 3: 张量分解

引入张量分解 (如CP、张量积), 通过降低优化变量维度隐式约束张量秩, 从而避免高昂的 SVD 运算。

→ 挑战: 但在复杂场景下, **张量秩的精确自适应估计**仍是亟待解决的难题。



国内外研究现状：面向特定应用的挑战

通用模型难以充分刻画复杂真实数据的生成机理，亟需引入结构化先验：

- **高光谱异常检测**：现有“先学习字典，再检测”的解耦策略难以充分匹配背景；仅关注空间维度，**忽略光谱异常特征**。

$$\min_{\mathcal{L}, \mathcal{S}} \text{rank}(\mathcal{L}) + \lambda \|\mathcal{S}\|_0, \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} = \mathcal{D} * \mathcal{L} + \mathcal{S}.$$

- **鲁棒图像对齐**：包含几何变换算子 Γ 。现有方法依赖大规模SVD或矩阵乘法，计算昂贵，且对图像内部和图像之间的**局部几何结构关注不足**。

$$\min_{\mathcal{L}, \mathcal{S}, \Gamma} \text{rank}(\mathcal{L}) + \lambda \|\mathcal{S}\|_0, \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} \circ \Gamma = \mathcal{L} + \mathcal{S}.$$

- **交通数据重构与检测**：需引入采样算子 \mathcal{P}_Ω 。现有方法多局限于单视图或浅层耦合，未充分挖掘多视图（流量、速度、占有率）间的**物理一致性**。

$$\min_{\mathcal{L}, \mathcal{S}} \text{rank}(\mathcal{L}) + \lambda \|\mathcal{S}\|_0, \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{X}) = \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{L} + \mathcal{S}).$$



目录

- 1 绪论
 - 研究背景与意义
 - 国内外研究现状
 - 本文的主要研究内容与创新
- 2 主要研究工作
- 3 结论与展望
- 4 攻读学位期间的学术或实践成果



研究内容一：高光谱异常检测 (Ch. 3)

核心思想与数学模型

通过字典学习自适应地表示复杂背景，并用非凸函数精确刻画低秩与稀疏先验。




$$\min \underbrace{\sum_{u=1}^3 \alpha_u \|\nabla_u \mathcal{A}\|_{\odot}^{\psi}}_{\text{字典平滑约束}} + \underbrace{\lambda_1 \|\mathcal{L}\|_{\odot}^{\psi}}_{\text{背景低秩}} + \underbrace{\lambda_2 \|\mathcal{S}\|_{TF}^{\psi}}_{\text{异常稀疏}}$$

s.t. $\mathcal{X} = \mathcal{A} * \mathcal{L} + \mathcal{S}$.

性能提升策略

提出一种由粗到精的两阶段(CF2)框架，通过二次提纯与精炼，显著提升检测精度。

主要贡献

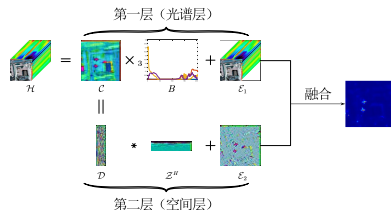
-  **模型创新**：提出GNBRL模型，在统一框架内**同时学习字典和异常**，并引入**广义非凸函数**提升了表示精度。
-  **理论完备**：提供了模型恢复异常的**误差界**，并证明了求解算法的**收敛性**。
-  **算法高效**：设计了外推线性化 ADMM 算法对模型进行快速求解。



研究内容二：高光谱异常检测 (Ch. 4)

统一优化的数学模型

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{\lambda_1}{2} \|B\|^2 + \lambda_2 \|\mathcal{E}_1\|_{TF}^\phi + \frac{\lambda_3}{2} \|\mathcal{H} - C \times_3 B - \mathcal{E}_1\|^2 + \lambda_4 \|Z\|_{LS}^\psi + \lambda_5 \|\mathcal{E}_2\|_{TF}^\phi \\ \text{s.t.} \quad & C = D * Z^H + \mathcal{E}_2, B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$



$$\text{rank}_t(\mathcal{L}) \equiv \min\{\|Z\|_{LS}^0 : \mathcal{L} = D * Z^H, D^H * D = I\}$$

$$\updownarrow$$

$$\min\{\|Z\|_{LS}^\psi : \mathcal{L} = D * Z^H, D^H * D = I\}$$

核心创新点

- 统一检测框架：**首次在单一模型中**协同优化**光谱与空间异常，实现信息互补。
- 理论创新：**建立了张量管秩与组稀疏的**等价关系**，为高效计算提供了理论依据。
- 效率优势：**以低成本的**组稀疏**正则化替代高成本的核范数，计算效率显著提升；设计了**带验证机制的自适应秩减小策略**，进一步降低了计算复杂度。

研究内容三：鲁棒图像对齐 (Ch. 5)

核心思想与数学模型



通过张量字典学习自适应地表示图像数据，并用广义超拉普拉斯正则化刻画局部结构先验。

$$\min \|\mathcal{L}\|_{\otimes}^{\psi} + \lambda_1 \|\mathcal{E}\|_1^{\psi} + \lambda_2 \underbrace{\sum_{i=1}^3 \|G_i D_i\|_p^p}_{\text{广义超拉普拉斯}} + \frac{\beta}{2} \underbrace{\|\mathcal{L} \times_1 D_1 \times_2 D_2 \times_3 D_3 + \mathcal{E} - \mathcal{Y} \circ \Gamma\|^2}_{\text{字典表示}}.$$

理论完备

建立了 DTDL 模型与基于 Tucker 秩和管秩的无字典模型之间的等价关系。

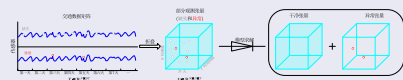
主要贡献

-  **模型创新：** 提出 DTDL 模型，通过将**张量分解**为小尺寸系数张量与三个字典矩阵以降低计算复杂度，并在字典上引入广义超拉普拉斯正则化，从而保持**图像内部与图像之间**的局部结构信息。
-  **算法设计：** 提出双层嵌套求解策略（广义高斯-牛顿法 + 邻近线性化ADMM）。



研究内容四：交通数据重构与事件检测 (Ch. 6)

研究挑战与框架



如何融合多源数据，在统一框架下协同完成数据重构与事件检测？

理论保障

- **张量积理论优势**: 证明了张量积在保留数据结构上优于传统矩阵化方法。
- **算法收敛性保障**: 严格证明了所提算法产生的迭代序列收敛至 KKT 点。

统一优化的数学模型

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mathcal{Z}\|_{\Phi}^{\phi} + \gamma \|\mathcal{E}\|_{T^4F}^{\psi} + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^V \sum_{u=1}^3 \|\mathcal{X}^v \times_u D_u\|^2 \\ & + \sum_{v=1}^V \delta_{\mathbb{S}^v}(\mathcal{X}^v) \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{X}^v = \mathcal{X}^v * \mathcal{Z}^v + \mathcal{E}^v, v = 1, \dots, V. \end{aligned}$$

核心技术体系

- **一体化框架设计**: 创新性地多源数据重构与事件检测**统一建模**，实现信息协同与增强。
- **耦合低秩与稀疏先验**: 设计了新颖的耦合机制，联合约束子空间的**低秩一致性**与异常事件的**共享稀疏性**。
- **时空正则化**: 引入时空平滑正则项，将交通流的连续性融入模型，提升求解精度。



目录

- 1 绪论
- 2 主要研究工作
 - 基于字典约束背景表示学习的广义非凸高光谱异常检测 (Ch. 3)
 - 基于分层张量分解的光谱-空间联合高光谱异常检测 (Ch. 4)
 - 基于数据驱动张量字典学习的鲁棒图像对齐 (Ch. 5)
 - 基于统一时空耦合多视图张量模型的交通数据重构与事件检测 (Ch. 6)
- 3 结论与展望
- 4 攻读学位期间的学术或实践成果

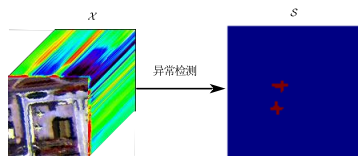


背景与模型

给定观测到的高光谱图像 \mathcal{X} 与字典 \mathcal{A} ，用于高光谱异常检测的 **张量低秩表示** 模型可表示为：

$$\min_{\mathcal{L}, \mathcal{S}} \text{rank}(\mathcal{L}) + \lambda \|\mathcal{S}\|_{TF}^0, \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} = \mathcal{A} * \mathcal{L} + \mathcal{S}. \quad (1)$$

其中 $\|\mathcal{S}\|_{TF}^0 = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \|\mathcal{S}(i, j, :)\|^0$ 。



相关工作与模型对比

- 字典构建
 - SVD: TLRA-MSL¹
 - k -means 聚类: GTVLRR², SRTDaAW³
 - RPCA: TLRSR⁴
- 低秩近似
 - 核范数: GTVLRR³, LRASR⁵
 - 加权核范数: TLRSR⁵
 - 截断核范数: PTA⁶

¹He, Xu, et al. "Anomaly Detection for Hyperspectral Imagery via Tensor Low-Rank Approximation With Multiple Subspace Learning." IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing (2023).

²Cheng, Tongkai, and Bin Wang. "Graph and Total Variation Regularized Low-Rank Representation for Hyperspectral Anomaly Detection." IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing 58(1) (2019): 391-406.

³Yang, Yixin, et al. "Hyperspectral Anomaly Detection through Sparse Representation with Tensor Decomposition-based Dictionary Construction and Adaptive Weighting." IEEE Access 8 (2020): 72121-72137.

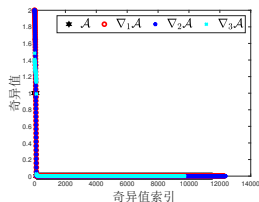
⁴Wang, Minghua, et al. "Learning Tensor Low-Rank Representation for Hyperspectral Anomaly Detection." IEEE Transactions on Cybernetics 53(1) (2022): 679-691.

⁵Xu, Yang, et al. "Anomaly Detection in Hyperspectral Images based on Low-Rank and Sparse Representation." IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing 54(4) (2015): 1990-2000.

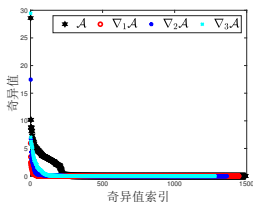
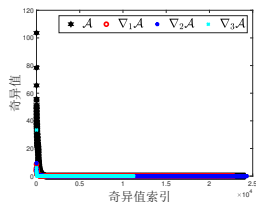
⁶Li, Lu, et al. "Prior-based Tensor Approximation for Anomaly Detection in Hyperspectral Imagery." IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems 33(3) (2020): 1037-1050.

字典约束

不同于模型 (1) 采用预构字典 \mathcal{A} ，我们将字典构建与异常检测联合进行，从而学习到一个更全面的字典以用于背景重建。



(a) SVD

(b) k -means 聚类

(c) RPCA

图: 字典张量 \mathcal{A} 及其梯度张量 $\nabla_u \mathcal{A}$, $u \in [3]$ 的奇异值衰减曲线



结合前一页展示的奇异值衰减特性，我们利用梯度张量对字典张量进行低秩建模，进而提出如下的联合优化模型：

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{S}} \quad & \sum_{u=1}^3 \alpha_u \text{rank}(\nabla_u \mathcal{A}) + \lambda_1 \text{rank}(\mathcal{L}) + \lambda_2 \|\mathcal{S}\|_{\text{TF}}^0 \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{X} = \mathcal{A} * \mathcal{L} + \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (2)$$

其中， $\nabla_1 \mathcal{A}$, $\nabla_2 \mathcal{A}$, $\nabla_3 \mathcal{A}$ 分别表示沿垂直、水平以及光谱方向的一阶前向有限差分算子。



广义非凸近似

与现有大多数非凸高光谱异常检测方法**仅对低秩项进行非凸近似**不同，我们将非凸近似**同时应用于低秩项与稀疏项**。进一步，我们引入了一种统一逼近低秩与稀疏的**广义松弛函数**，具体定义如下：

$$\begin{aligned}\|\mathcal{X}\|_{\circledast}^{\psi} &= \frac{1}{n_3} \sum_{k=1}^{n_3} \sum_{i=1}^{\min\{n_1, n_2\}} \psi\left(\sigma_i\left(\bar{X}^{(k)}\right)\right), \\ \|\mathcal{X}\|_{TF}^{\psi} &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \psi\left(\|\mathcal{X}(i, j, :)\|\right).\end{aligned}\tag{3}$$

其中， $\psi(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 为给定的非凸惩罚函数。



利用公式 (3) 中的广义非凸松弛策略替换原有的 $\text{rank}(\cdot)$ 与 $\|\cdot\|_{TF}^0$, 我们最终建立的 **GNBRL** 模型如下:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{S}} \quad & \sum_{u=1}^3 \alpha_u \|\nabla_u \mathcal{A}\|_{\otimes}^{\psi} + \lambda_1 \|\mathcal{L}\|_{\otimes}^{\psi} + \lambda_2 \|\mathcal{S}\|_{TF}^{\psi} \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{X} = \mathcal{A} * \mathcal{L} + \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (4)$$

假设 2.1

函数 $\psi(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是连续、非递减的凹函数, 且满足 $\psi(0) = 0$.



大多数常见的非凸函数均满足假设 2.1。以下列举了五类代表性的惩罚函数（为简便起见，此处仅考虑 $x > 0$ 的情形）：

(1) L1 范数: $\psi^{L1}(x) = x$;

(2) Lp 范数: $\psi^{Lp}(x) = x^p, p \in (0, 1)$;

(3) MCP: $\psi^{MCP}(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2\alpha}, & 0 \leq x \leq \alpha, \\ \frac{\alpha}{2}, & x > \alpha \end{cases}$, 其中 $\alpha > 0$;

(4) 对数惩罚 (Logarithm): $\psi^{Log}(x) = \log(\frac{x}{\theta} + 1)$, 其中 $\theta > 0$;

(5) 截断型函数 (Capped folded functions):

- 截断 L1: $\psi^{CapL1}(x) = \min \left\{ 1, \frac{x}{\nu} \right\}$;
- 截断 Lp: $\psi^{CapLp}(x) = \min \left\{ 1, \frac{x^p}{\nu^p} \right\}, p \in (0, 1)$;
- 截断 MCP: $\psi^{CapMCP}(x) = \min \left\{ 1, \frac{2\alpha}{\nu(2\alpha-\nu)} \psi^{MCP}(x) \right\}, 0 < \nu < \alpha$;
- 截断对数: $\psi^{CapLog}(x) = \min \left\{ 1, \frac{1}{\psi^{Log}(\nu)} \psi^{Log}(x) \right\}$.



GNBRL 的误差界

接下来, 我们给出非凸函数 ψ 的一些关键性质, 这些性质对于后续的误差界分析至关重要。

引理 1

设 $\mathcal{B}, \mathcal{S} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 为任意两个张量, 则以下不等式成立:

- (1) $\|\mathcal{B}\|_{\oplus}^{\psi} - \|\mathcal{S}\|_{\oplus}^{\psi} \leq \|\mathcal{B} - \mathcal{S}\|_{\oplus}^{\psi} \leq \|\mathcal{B}\|_{\oplus}^{\psi} + \|\mathcal{S}\|_{\oplus}^{\psi}$;
- (2) $\|\mathcal{B} - \mathcal{S}\|_{TF}^{\psi} \leq \|\mathcal{B}\|_{TF}^{\psi} + \|\mathcal{S}\|_{TF}^{\psi}$;
- (3) $\psi(\|\mathcal{B}\|) \leq \|\mathcal{B}\|_{TF}^{\psi} \leq \|\mathcal{B}\|_1^{\psi}$, 其中 $\|\mathcal{B}\|_1^{\psi} := \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} \psi(|\mathcal{B}_{ijk}|)$ 。

定义 2 (ψ -RTEC)

定义

$$\zeta_{\min}(2s) = \min_{\|\mathcal{L}\|_{\oplus}^{\psi} \leq 2s} \frac{\|\mathcal{A} * \mathcal{L}\|}{\|\mathcal{L}\|}. \quad (5)$$

若 $\zeta_{\min}(2s) > 0$, 则称张量 \mathcal{A} 满足关于 s 的 ψ -限制性张量特征值条件, 记为 ψ -RTEC(s)。



定理 3

设 $(\mathcal{L}^\natural, \mathcal{S}^\natural)$ 为真实的低秩-稀疏张量对, $(\mathcal{A}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{S}^*)$ 为优化问题 (4) 的一个最优解。假设张量 \mathcal{A}^* 满足 ψ -RTEC(s) 条件, $\mathcal{X} = \mathcal{A}^* * \mathcal{L}^\natural + \mathcal{S}^\natural$, $\|\mathcal{L}^\natural\|_{\otimes}^{\psi} \leq \|\mathcal{L}^*\|_{\otimes}^{\psi} := s$, 且 $\lambda_2 > \lambda_1 r \vartheta_{r,s}^{\psi}$, $r = \min\{n_1, n_2\}$ 。则有如下误差界成立:

$$\psi\left(\|\mathcal{S}^\natural - \mathcal{S}^*\|\right) \leq \|\mathcal{S}^\natural - \mathcal{S}^*\|_{TF}^{\psi} \leq \frac{2\lambda_2 \|\mathcal{S}^\natural\|_{TF}^{\psi}}{\lambda_2 - \lambda_1 r \vartheta_{r,s}^{\psi}}. \quad (6)$$

其中 $\vartheta_{r,s}^{\psi}$ 为仅依赖于 r 、 s 及函数 ψ 的常数。



推论 4

当 $\psi(x) = x^p$ 时, 若稀疏张量 S^{h} 的支撑集基数不超过 m , 且其非零元素绝对值的平均值以 T 为上界, 则通过恰当地选择参数 λ_1 和 λ_2 , 异常恢复误差满足

$$\|S^{\text{h}} - S^*\| \leq \sqrt[p]{4mT}.$$

换言之, 对于高度稀疏的异常张量, 只要 T 有界, 其平均重构误差 $\|S^{\text{h}} - S^*\|/M$ (其中张量总元素数 $M = n_1 n_2 n_3$) 将非常小。

推论 5

根据 $\zeta_{\min}(2s)$ 在公式 (5) 中的定义可知, 较小的 s (对应于 \mathcal{L}^* 具有更低的有效秩) 将导致更大的 $\zeta_{\min}(2s)$ 。由于 $\vartheta_{r,s}^{\psi}$ 与 $\zeta_{\min}(2s)$ 成反比, 这意味着 $\vartheta_{r,s}^{\psi}$ 的取值将随之减小。结合定理 3 中给出的误差界, 可以推断出异常恢复误差 $\|S^{\text{h}} - S^*\|$ 也将相应减小。上述分析从理论上揭示了一个直观结论: **背景张量的秩越低, 最终的异常检测性能越优。**



用于增强 GNBRL 模型的 CF2 框架

为了提高在**复杂场景**下对复杂目标的检测精度，我们针对 GNBRL 模型开发了一种由粗到细的两阶段增强检测框架 (CF2)，即 CF2-GNBRL。

- **粗检测阶段 (Coarse Stage):** 在该阶段，将 GNBRL 模型直接应用于整幅高光谱图像，对背景与异常进行初步分解，从而获得异常分量的粗检测结果 \tilde{S} 。
- **精检测阶段 (Fine Stage):** 在该阶段，首先利用 BM3D 技术将整幅高光谱图像划分为 N 个由相似三阶子张量构成的图像块分组张量 (均为三阶张量)。随后，将 GNBRL 模型分别应用于每一个图像块分组张量，以获得对应的精细化异常检测结果 $\hat{S}_{patch}^1, \hat{S}_{patch}^2, \dots, \hat{S}_{patch}^N$ 。与此同时，按照相同的划分方式，将粗检测阶段得到的异常结果 \tilde{S} 分割为 N 个对应的异常块 $\tilde{S}_{patch}^1, \tilde{S}_{patch}^2, \dots, \tilde{S}_{patch}^N$ 。

最后，通过如下融合规则获得最终的异常检测结果 S^* ：

$$S_{patch}^{\star, l} = \begin{cases} \tilde{S}_{patch}^l, & \text{gap}(\tilde{S}_{patch}^l, \hat{S}_{patch}^l) < \varrho; \\ \hat{S}_{patch}^l, & \text{gap}(\tilde{S}_{patch}^l, \hat{S}_{patch}^l) \geq \varrho. \end{cases} \quad (7)$$

其中， ϱ 为给定的阈值参数，函数 $\text{gap}(\cdot)$ 定义为

$$\text{gap}(\tilde{S}_{patch}^l, \hat{S}_{patch}^l) = \|\tilde{S}_{patch}^l - \hat{S}_{patch}^l\| / \|\tilde{S}_{patch}^l\|.$$



ELADMM算法

在实际的高光谱图像数据中，光谱向量的各个分量通常会受到高斯噪声的干扰。因此，我们将模型 (4) 扩展为如下显式考虑噪声项的优化问题：

$$\min_{\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{S}} \sum_{u=1}^3 \alpha_u \|\nabla_u \mathcal{A}\|_{\odot}^{\psi} + \lambda_1 \|\mathcal{L}\|_{\odot}^{\psi} + \lambda_2 \|\mathcal{S}\|_{TF}^{\psi} + \beta f(\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{S}). \quad (8)$$

其中 $f(\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{S}) = \frac{1}{2} \|\mathcal{A} * \mathcal{L} + \mathcal{S} - \mathcal{X}\|^2$ 是数据保真项。



通过引入辅助变量 $\mathcal{C}_u = \nabla_u \mathcal{A}$, $u \in [3]$, 问题 (8) 可等价地重写为如下形式:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{S}, \{\mathcal{C}_u\}_{u=1}^3} \quad & \sum_{u=1}^3 \alpha_u \|\mathcal{C}_u\|_{\odot}^{\psi} + \lambda_1 \|\mathcal{L}\|_{\odot}^{\psi} + \lambda_2 \|\mathcal{S}\|_{TF}^{\psi} + \beta f(\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{S}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{C}_u = \nabla_u \mathcal{A}, u \in [3]. \end{aligned} \quad (9)$$

上述问题的增广拉格朗日函数可表示为

$$\begin{aligned} & \mathbb{L}(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{C}_u, \mathcal{L}; \mathcal{T}_u, \beta_u) \\ &= \sum_{u=1}^3 \left(\alpha_u \|\mathcal{C}_u\|_{\odot}^{\psi} + \langle \mathcal{T}_u, \nabla_u \mathcal{A} - \mathcal{C}_u \rangle + \frac{\beta_u}{2} \|\nabla_u \mathcal{A} - \mathcal{C}_u\|^2 \right) \\ & \quad + \lambda_1 \|\mathcal{L}\|_{\odot}^{\psi} + \lambda_2 \|\mathcal{S}\|_{TF}^{\psi} + \beta f(\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{S}). \end{aligned} \quad (10)$$

其中 β_u , $u \in [3]$ 为惩罚参数, \mathcal{T}_u , $u \in [3]$ 为拉格朗日乘子。



在 ADMM 框架下, 各变量可通过交替最小化的方式进行更新, 即

$$\begin{cases} \mathcal{S}^{t+1} \in \arg \min_{\mathcal{S}} \mathbb{L}(\mathcal{S}, \mathcal{A}^t, \mathcal{C}_u^t, \mathcal{L}^t; \mathcal{T}_u^t, \beta_u^t); \\ \mathcal{A}^{t+1} \in \arg \min_{\mathcal{A}} \mathbb{L}(\mathcal{S}^{t+1}, \mathcal{A}, \mathcal{C}_u^t, \mathcal{L}^t; \mathcal{T}_u^t, \beta_u^t); \\ \mathcal{C}_u^{t+1} \in \arg \min_{\mathcal{C}_u} \mathbb{L}(\mathcal{S}^{t+1}, \mathcal{A}^{t+1}, \mathcal{C}_u, \mathcal{L}^t; \mathcal{T}_u^t, \beta_u^t); \\ \mathcal{L}^{t+1} \in \arg \min_{\mathcal{L}} \mathbb{L}(\mathcal{S}^{t+1}, \mathcal{A}^{t+1}, \mathcal{C}_u^{t+1}, \mathcal{L}; \mathcal{T}_u^t, \beta_u^t). \end{cases}$$

拉格朗日乘子与惩罚参数的更新规则为

$$\begin{cases} \mathcal{T}_u^{t+1} = \mathcal{T}_u^t + \beta_u^t (\nabla_u \mathcal{A}^{t+1} - \mathcal{C}_u^{t+1}); \\ \beta_u^{t+1} = \rho \beta_u^t, u \in [3]. \end{cases} \quad (11)$$

其中 t 表示迭代次数, $\rho > 1$ 为给定常数。



尽管增广拉格朗日函数 $\mathbb{L}(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \{\mathcal{C}_u\}, \mathcal{L}; \{\mathcal{T}_u\}, \{\beta_u\})$ 关于变量 \mathcal{A} 是凸的, 但对应的子问题并不存在闭式解。我们通过求解如下线性化近似子问题来更新 \mathcal{A} :

$$\arg \min_{\mathcal{A}} \sum_{u=1}^3 \left(\langle \mathcal{T}_u^t, \nabla_u \mathcal{A} - \mathcal{C}_u^t \rangle + \frac{\beta_u^t}{2} \|\nabla_u \mathcal{A} - \mathcal{C}_u^t\|^2 \right) \quad (12)$$

$$+ \beta \left\langle \nabla_{\mathcal{A}} f(\hat{\mathcal{A}}^t, \mathcal{L}^t, \mathcal{S}^{t+1}), \mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}^t \right\rangle + \frac{\beta l_{\mathcal{A}^t}}{2} \|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}^t\|^2.$$

其中 $f(\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{S}) = \frac{1}{2} \|\mathcal{A} * \mathcal{L} + \mathcal{S} - \mathcal{X}\|^2$, $l_{\mathcal{A}^t} \geq l_{\mathcal{A}}(f)$, $l_{\mathcal{A}}(f)$ 为梯度算子 $\nabla_{\mathcal{A}} f(\mathcal{A}, \mathcal{L}^t, \mathcal{S}^{t+1})$ 关于变量 \mathcal{A} 的利普希茨 (Lipschitz) 常数, 而 $\hat{\mathcal{A}}^t$ 为外推点。



算法 1: 求解 GNBRL 模型的 ELADMM 算法

- 1 **输入:** 张量数据 \mathcal{X} , 参数 $\{\alpha_u\}_{u=1}^3, \lambda_1, \lambda_2, \beta$ 。设置 $t \leftarrow 0$ 。
 - 2 **初始化:** $\mathcal{A}^0, \mathcal{L}^0, \mathcal{S}^0, \{\mathcal{C}_u^0, \mathcal{T}_u^0\}_{u=1}^3, \{\beta_u^0\}_{u=1}^3$ 。
 - 3 更新 \mathcal{S}^{t+1} ;
 - 4 计算外推点 $\hat{\mathcal{A}}^t = \mathcal{A}^t + \omega_{\mathcal{A}}^t (\mathcal{A}^t - \mathcal{A}^{t-1})$, 然后更新 \mathcal{A}^{t+1} ;
 - 5 更新 \mathcal{C}_u^{t+1} ;
 - 6 计算外推点 $\hat{\mathcal{L}}^t = \mathcal{L}^t + \omega_{\mathcal{L}}^t (\mathcal{L}^t - \mathcal{L}^{t-1})$, 然后更新 \mathcal{L}^{t+1} ;
 - 7 根据公式 (11) 更新拉格朗日乘子 \mathcal{T}_u^{t+1} 和惩罚参数 β_u^{t+1} ;
 - 8 若满足停止准则, 则令 $\mathcal{S}^* := \mathcal{S}^{t+1}$; 否则, 令 $t \leftarrow t + 1$, 并返回步骤 3;
 - 9 **输出:** \mathcal{S}^* 。
-



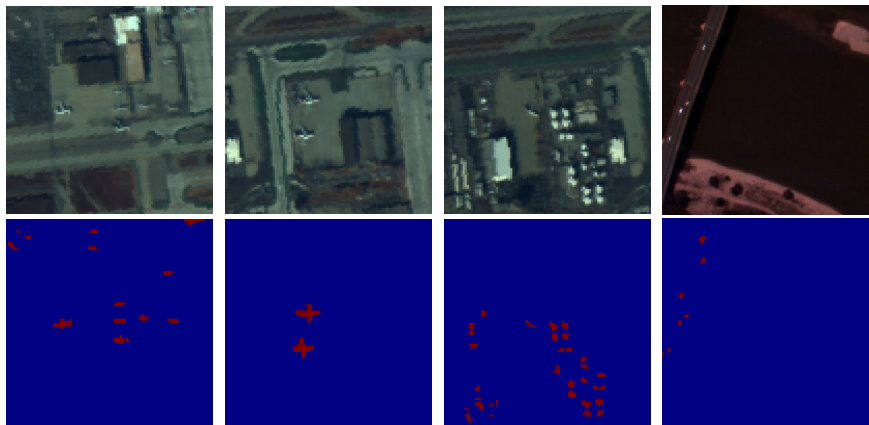
收敛性分析

定理 6

设 $\{S^t, A^t, C_u^t, \mathcal{L}^t, \mathcal{T}_u^t\}_{t=1}^{+\infty}$ 为算法 1 生成的序列。若 $\{A^t, \mathcal{L}^t\}_{t=1}^{+\infty}$ 有界，则整个序列的任意聚点均为优化问题 (9) 的一个 *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) 点。



数值实验



(a) Airport1

(b) Airport2

(c) Urban

(d) Beach

图: 四个高光谱数据集的伪彩色图像及其对应的真实地物标注



检测性能对比

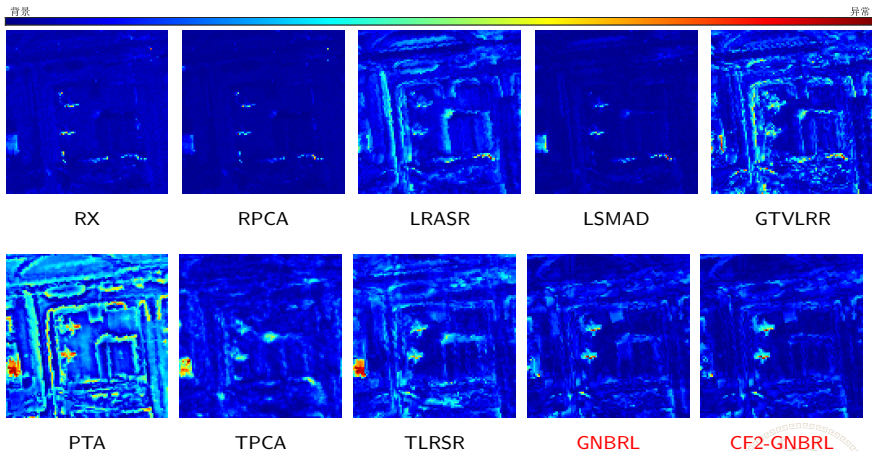


图: 不同方法在高光谱数据集 Airport2 上的异常检测结果图



表: 不同方法在四个高光谱数据集上的 AUC 值 (%) 与运行时间 (秒)

| 算法 | Airport1 | | Airport2 | | Urban | | Beach | |
|-----------|--------------|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|
| | AUC (%) | 时间 (秒) | AUC (%) | 时间 (秒) | AUC (%) | 时间 (秒) | AUC (%) | 时间 (秒) |
| RX | 82.21 | 0.42 | 84.03 | 0.41 | 96.92 | 0.41 | 95.39 | 0.04 |
| RPCA | 80.89 | 8.00 | 84.31 | 7.44 | 96.58 | 6.98 | 95.99 | 1.95 |
| LRASR | 77.28 | 53.81 | 86.48 | 70.13 | 92.89 | 47.51 | 95.65 | 104.90 |
| LSMAD | 83.39 | 9.54 | 92.17 | 8.60 | 96.05 | 8.74 | 97.06 | 7.65 |
| GTVLRR | 90.04 | 171.47 | 88.89 | 227.16 | 93.73 | 229.16 | 98.02 | 378.60 |
| PTA | 73.30 | 13.50 | 90.95 | 20.96 | 82.57 | 24.89 | 90.61 | 29.11 |
| TPCA | 80.22 | 30.91 | 88.90 | 30.62 | 93.69 | 22.15 | 95.82 | 21.71 |
| TLRSR | 90.56 | 3.44 | 94.57 | 3.63 | 97.10 | 3.58 | 95.98 | 5.84 |
| GNBRL | 94.75 | 1.60 | 98.00 | 1.50 | 98.38 | 1.91 | 98.03 | 4.01 |
| CF2-GNBRL | 96.84 | 27.14 | 98.81 | 31.63 | 98.98 | 31.40 | 99.24 | 83.06 |

最优结果以粗体标出



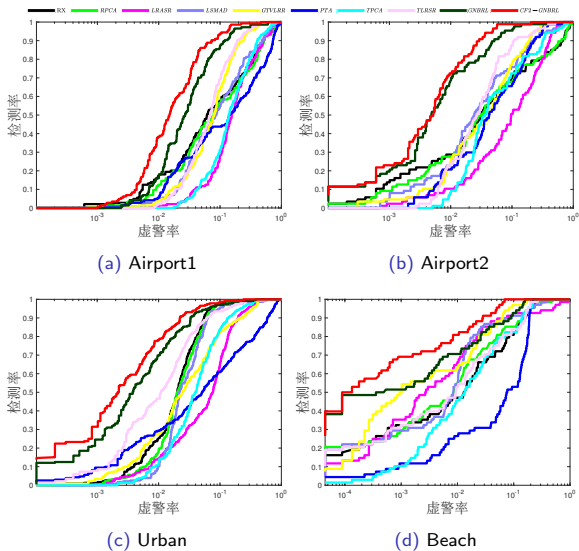


图: 不同方法在四个高光谱数据集上的 ROC 曲线



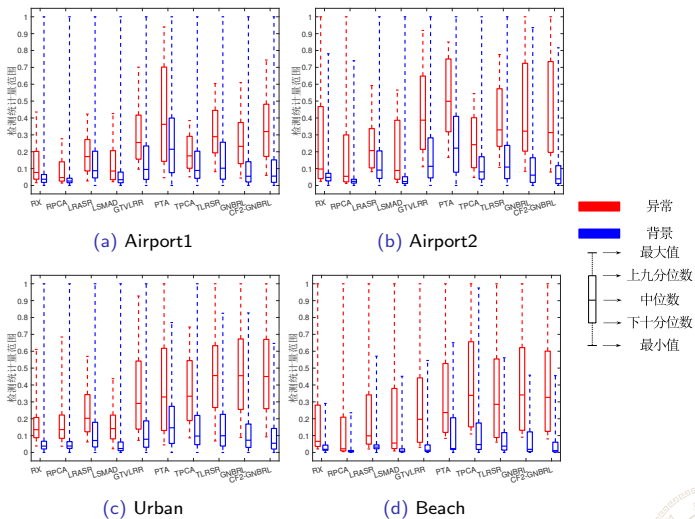


图: 不同方法在四个高光谱数据集上的背景-异常分离箱线图



参数分析

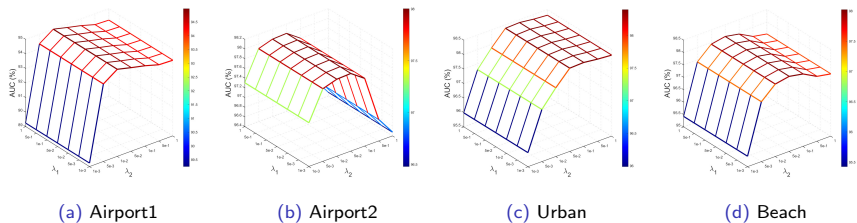


图: 不同 λ_1 和 λ_2 取值下 GNBRL 模型的 AUC 值 (%) 曲面图



我们采用 $\beta^{t+1} = \min \{ \kappa \beta^t, 1e8 \}$ 的更新策略。

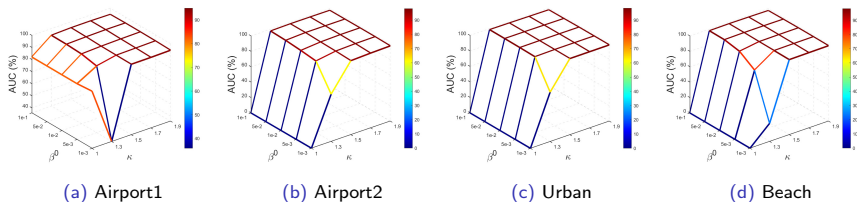


图: 不同 β^0 和 κ 取值下 GNBRL 模型的 AUC 值 (%) 曲面图



不同非凸函数的性能对比

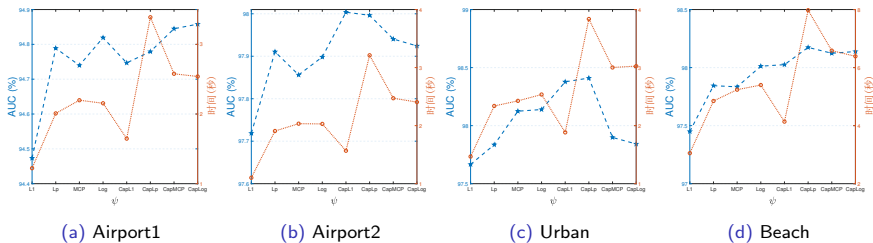


图: 不同非凸函数 ψ 下 GNBRL 模型的 AUC 值 (%) 及运行时间 (秒)



字典约束的有效性分析

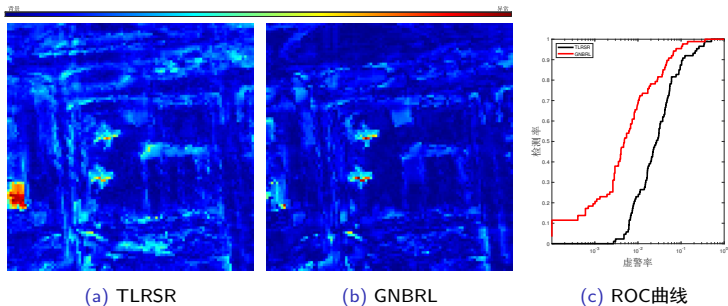
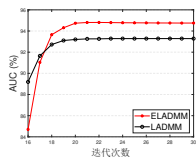


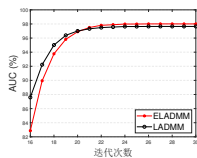
图: TLRSR 与 GNBRL 方法在 Airport2 数据集上的异常检测结果图及 ROC 曲线



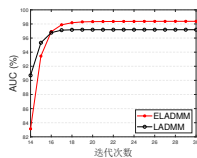
外推策略的有效性分析



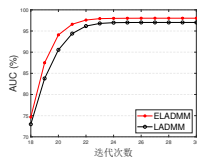
(a) Airport1



(b) Airport2



(c) Urban



(d) Beach

图: LADMM 与 ELADMM 算法的 AUC 值 (%) 随迭代次数变化的曲线



本章小结

本章针对高光谱异常检测问题，提出了广义非凸背景表示学习（GNBRL）模型。主要工作与创新点总结如下：

- **模型构建：** 在背景表示学习框架下，引入**三维相关全变分正则项**对字典施加结构化约束，同时采用**广义非凸函数**对低秩与稀疏项进行更精确的刻画。
- **理论保障：** 建立了 GNBRL 模型的**误差界分析**。
- **算法设计：** 设计了一种高效的外推线性化交替方向乘子法进行求解，并证明了算法的收敛性。
- **架构拓展：** 提出了**由粗到精两阶段 (CF2) 框架**，进一步增强了模型的异常检测能力，并在真实数据集上验证了其优越性。



目录

- 1 绪论
- 2 主要研究工作
 - 基于字典约束背景表示学习的广义非凸高光谱异常检测 (Ch. 3)
 - 基于分层张量分解的光谱-空间联合高光谱异常检测 (Ch. 4)
 - 基于数据驱动张量字典学习的鲁棒图像对齐 (Ch. 5)
 - 基于统一时空耦合多视图张量模型的交通数据重构与事件检测 (Ch. 6)
- 3 结论与展望
- 4 攻读学位期间的学术或实践成果



背景与模型

给定观测到的高光谱图像 \mathcal{H} , 用于高光谱异常检测的张量低秩表示模型可表示为:

$$\text{[空间异常]} \quad \min_{\mathcal{Z}, \mathcal{E}} \text{rank}(\mathcal{Z}) + \lambda \|\mathcal{E}\|_{\text{TF}}^0, \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{H} = \mathcal{D} * \mathcal{Z} + \mathcal{E}.$$

$$\text{[光谱异常]} \quad \min_{\mathcal{Z}, \mathcal{E}} \text{rank}(\mathcal{Z}) + \lambda \|\mathcal{E}\|_{\text{TF}}^0, \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{H} = \mathcal{Z} \times_3 \mathcal{D} + \mathcal{E}.$$



相关工作与现有局限性

- 空间异常
 - TLRA-MSL⁷: ε -TNN + $\|\mathcal{E}\|_{TF}^1$
 - PCA-TLRSR⁸: Weighted-TNN + $\|\mathcal{E}\|_{TF}^1$
- 光谱异常
 - LARTVAD⁹: TNN + $\|\mathcal{E}\|_{TF}^1 + \|\mathcal{Z}\|_{TV}$

- ① 现有方法往往会忽略光谱域或空间域其中一者的异常信息；
- ② 模型求解通常涉及大规模矩阵的奇异值分解 (SVD)，计算代价高昂。

⁷He, Xu, et al. "Anomaly Detection for Hyperspectral Imagery via Tensor Low-Rank Approximation With Multiple Subspace Learning." IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing (2023).

⁸Wang, Minghua, et al. "Learning Tensor Low-Rank Representation for Hyperspectral Anomaly Detection." IEEE Transactions on Cybernetics 53(1) (2022): 679-691.

⁹Sun, Liu, et al. "Hyperspectral Anomaly Detection with Tensor Average Rank and Piecewise Smoothness Constraints." IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems 34(1) (2022): 8679-8692.

提出的 LTD 模型

为了克服上述局限性，我们提出了一种基于分层张量分解（Layered Tensor Decomposition, LTD）的高光谱异常检测模型。该模型包含两个协同集成的分解层。如下图所示，LTD 在一个统一的框架内，不仅能联合检测光谱与空间异常 ①，还能实现高效求解 ②。

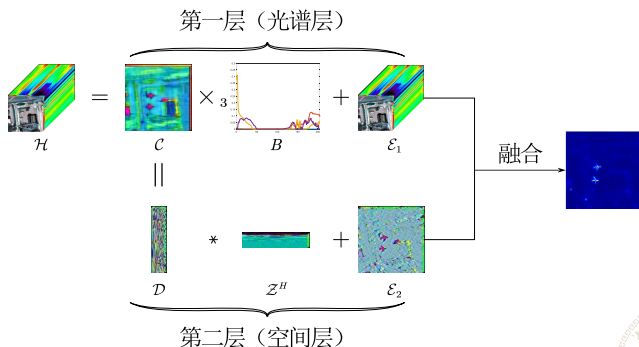


图: 异常检测方法流程图



第一层：光谱异常提取

由于高光谱图像 $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 各波段之间存在高度相关性，其数据具有显著的冗余性。基于这一特性，我们模型的第一层将 \mathcal{H} 分解为低维背景与光谱异常两部分：

$$\mathcal{H} = \mathcal{C} \times_3 B + \mathcal{E}_1.$$

- **光谱字典** $B \in \mathbb{R}^{n_3 \times b}$ ：列向量刻画了背景的主要光谱特征；
- **系数张量** $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times b}$ ：编码各背景光谱特征在空间维度上的丰度分布；
- **光谱异常张量** $\mathcal{E}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ：刻画光谱维度中的异常成分。



为保证分解的物理意义与数值稳定性，我们对模型引入以下约束与先验：

- **物理约束：** 考虑到光谱非负性，限制字典 $B \geq 0$ ；为消除尺度模糊性，对系数 C 的管纤维 (tube) 施加单位范数约束，即 $\|C(i, j, :)\| = 1$ 。
- **数据保真：** 采用 Frobenius 范数刻画观测数据中可能存在的高斯噪声。
- **异常先验：** 针对异常目标“空间稀疏、光谱稠密”的特性，采用组稀疏范数 $\|\cdot\|_{TF}^\phi$ 对异常张量 \mathcal{E}_1 进行正则化。

综合上述条件，构建光谱层对应的最终优化问题如下：

$$\begin{aligned} \min_{C, B, \mathcal{E}_1} \quad & \frac{\lambda_1}{2} \|B\|^2 + \lambda_2 \|\mathcal{E}_1\|_{TF}^\phi + \frac{\lambda_3}{2} \|\mathcal{H} - C \times_3 B - \mathcal{E}_1\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & B \geq 0, \|C(i, j, :)\| = 1, \forall i \in [n_1], j \in [n_2]. \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\|\mathcal{E}_1\|_{TF}^\phi := \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \phi(\|\mathcal{E}_1(i, j, :)\|)$ 。



第二层：空间异常提取

第一层光谱分解输出的系数张量 C ，将直接作为本层的输入。

- **空间自相似性：** 尽管光谱维度被有效压缩， C 依然继承了原始高光谱图像中强烈的空间自相似特性，从而呈现出显著的**空间低秩结构**。
- **异常分离：** 基于这一先验，我们将 C 进一步分解为低秩空间背景 \mathcal{L} 与稀疏空间异常 \mathcal{E}_2 。

由此，我们构建了如下的张量优化问题：

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{L}, \mathcal{E}_2} \quad & \lambda_4 \text{rank}_t(\mathcal{L}) + \lambda_5 \|\mathcal{E}_2\|_{\text{TF}}^\phi \\ \text{s.t.} \quad & C = \mathcal{L} + \mathcal{E}_2. \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\mathcal{L}, \mathcal{E}_2 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times b}$ 。



定理 7

对于任意张量 $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times b}$, 有

$$\text{rank}_t(\mathcal{L}) = \min \left\{ \|\mathcal{Z}\|_{LS}^0 \mid \mathcal{L} = \mathcal{D} * \mathcal{Z}^H, \mathcal{D}^H * \mathcal{D} = \mathcal{I}, \mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n_1 \times r \times b}, \mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{n_2 \times r \times b} \right\}.$$

其中 $\|\mathcal{Z}\|_{LS}^0 = \sum_{j=1}^r \|\mathcal{Z}(:, j, :)\|^0$, r 为任意满足 $\text{rank}_t(\mathcal{L}) \leq r \leq \min\{n_1, n_2\}$ 的整数。



定理 8

设函数 ψ 满足以下条件: $\psi(0) = 0$, 在区间 $(0, \nu)$ 上有 $x/\nu \leq \psi(x) < 1$, 且在区间 $[\nu, +\infty)$ 上满足 $\psi(x) = 1$ 。则存在一个常数 $\bar{\nu} > 0$, 使得当参数 ν 满足 $0 < \nu < \bar{\nu}$ 时, 下述两个优化问题具有相同的全局最优解与最优值:

$$\begin{cases} (P_0) & \min \left\{ \|\mathcal{Z}\|_{LS}^0 \mid \mathcal{L} = \mathcal{D} * \mathcal{Z}^H, \mathcal{D}^H * \mathcal{D} = \mathcal{I} \right\}; \\ (P_\psi) & \min \left\{ \|\mathcal{Z}\|_{LS}^\psi \mid \mathcal{L} = \mathcal{D} * \mathcal{Z}^H, \mathcal{D}^H * \mathcal{D} = \mathcal{I} \right\}. \end{cases}$$

其中 $\|\mathcal{Z}\|_{LS}^\psi = \sum_{j=1}^r \psi(\|\mathcal{Z}(:, j, :)\|)$ 。



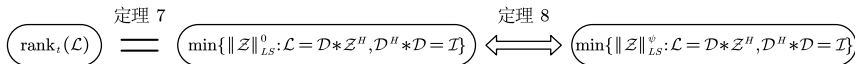


图: 张量管秩与组稀疏正则化的关系示意图

受定理 7 和 8 的启发, 我们将问题 (14) 转化为如下形式:

$$\min_{\mathcal{D}, \mathcal{Z}, \mathcal{E}_2} \lambda_4 \|\mathcal{Z}\|_{LS}^\psi + \lambda_5 \|\mathcal{E}_2\|_{TF}^\phi, \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{C} = \mathcal{D} * \mathcal{Z}^H + \mathcal{E}_2, \quad \mathcal{D}^H * \mathcal{D} = \mathcal{I}. \quad (15)$$

其中 $\mathcal{E}_2 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times b}$, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n_1 \times r \times b}$, $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{n_2 \times r \times b}$.



与张量核范数 (TNN) 相比, 优化 $\|\mathcal{Z}\|_{LS}^{\psi}$ 在计算效率上更加高效, 因为该方法避免了大规模矩阵奇异值分解运算, 且系数张量 \mathcal{Z} 的维度基本上远小于低秩张量 \mathcal{L} 。值得指出的是, 在基于 $\|\mathcal{Z}\|_{LS}^{\psi}$ 的优化过程中, 参数 r 可以自适应地逐步减小并逼近 $\text{rank}_t(\mathcal{L})$, 从而不需要引入额外的秩调整方法。综合考虑 $\text{rank}_t(\mathcal{L})$ 通常较小这一事实, 基于 $\|\mathcal{Z}\|_{LS}^{\psi}$ 的模型不仅具有较高的计算效率, 同时也能够展现出更加优秀的数值稳定性与检测性能。



综合第一层的光谱异常提取与第二层的空间异常提取，我们所提出的分层张量分解 (LTD) 模型可最终表述为如下优化问题：

$$\begin{aligned} \min_{\substack{C, B, \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{D}, \mathcal{Z}, \mathcal{E}_2}} & \frac{\lambda_1}{2} \|B\|^2 + \lambda_2 \|\mathcal{E}_1\|_{TF}^\phi + \frac{\lambda_3}{2} \|\mathcal{H} - \mathcal{C} \times_3 B - \mathcal{E}_1\|^2 + \lambda_4 \|\mathcal{Z}\|_{LS}^\psi + \lambda_5 \|\mathcal{E}_2\|_{TF}^\phi \\ \text{s.t.} & \quad \mathcal{C} = \mathcal{D} * \mathcal{Z}^H + \mathcal{E}_2, B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\mathcal{B} = \{B \mid B \geq 0\}$, $\mathcal{C} = \{C \mid \|C(i, j, :)\| = 1\}$, $\mathcal{D} = \{\mathcal{D} \mid \mathcal{D}^H * \mathcal{D} = \mathcal{I}\}$ 。



空-谱融合

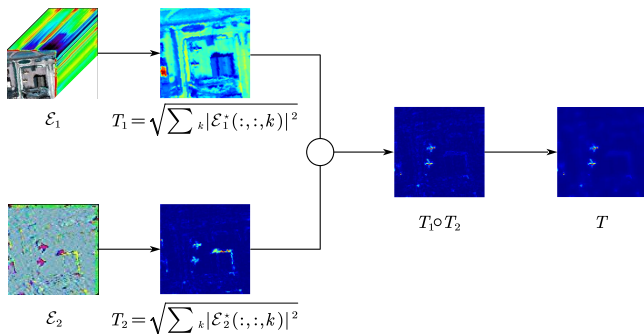


图: 空-谱融合流程图

$$T = \text{IGF}(T_1 \circ T_2) \quad \text{或} \quad T = \text{IGF}(\text{IGF}(\text{IGF}(T_1 \circ T_2), T_1), T_2), \quad (17)$$

其中, \circ 表示哈达玛积, 而 IGF 表示指导图像滤波器 (guided image filter)。空-谱融合作为一个模块化的后处理阶段, 其设计独立于核心的 LTD 模型。



算法描述

利用半二次方分裂 (half-quadratic splitting) 技术, 我们将约束优化问题 (16) 重构为如下的无约束优化问题:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\substack{\mathcal{C}, B, \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{D}, \mathcal{Z}, \mathcal{E}_2}} F(\mathcal{C}, B, \mathcal{E}_1, \mathcal{D}, \mathcal{Z}, \mathcal{E}_2) \\
 & = \frac{\lambda_1}{2} \|B\|^2 + \lambda_2 \|\mathcal{E}_1\|_{TF}^\phi + \frac{\lambda_3}{2} \|\mathcal{H} - \mathcal{C} \times_3 B - \mathcal{E}_1\|^2 + \lambda_4 \|\mathcal{Z}\|_{LS}^\psi \\
 & \quad + \lambda_5 \|\mathcal{E}_2\|_{TF}^\phi + \frac{\lambda_6}{2} \left\| \mathcal{C} - \mathcal{D} * \mathcal{Z}^H - \mathcal{E}_2 \right\|^2 + \delta_{\mathcal{B}}(B) + \delta_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) + \delta_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}).
 \end{aligned} \tag{18}$$



在邻近交替最小化 (Proximal Alternating Minimization, PAM) 算法的框架下, 我们对各个变量进行交替更新, 其具体形式如下:

$$\begin{cases} \mathcal{C}^{t+1} = \arg \min_{\mathcal{C}} F(\mathcal{C}, B^t, \mathcal{E}_1^t, \mathcal{D}^t, \mathcal{Z}^t, \mathcal{E}_2^t) + \frac{\rho_1}{2} \|\mathcal{C} - \mathcal{C}^t\|^2; \\ B^{t+1} = \arg \min_B F(\mathcal{C}^{t+1}, B, \mathcal{E}_1^t, \mathcal{D}^t, \mathcal{Z}^t, \mathcal{E}_2^t) + \frac{\rho_2}{2} \|B - B^t\|^2; \\ \mathcal{E}_1^{t+1} = \arg \min_{\mathcal{E}_1} F(\mathcal{C}^{t+1}, B^{t+1}, \mathcal{E}_1, \mathcal{D}^t, \mathcal{Z}^t, \mathcal{E}_2^t) + \frac{\rho_3}{2} \|\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1^t\|^2; \\ \mathcal{D}^{t+1} = \arg \min_{\mathcal{D}} F(\mathcal{C}^{t+1}, B^{t+1}, \mathcal{E}_1^{t+1}, \mathcal{D}, \mathcal{Z}^t, \mathcal{E}_2^t) + \frac{\rho_4}{2} \|\mathcal{D} - \mathcal{D}^t\|^2; \\ \mathcal{Z}^{t+1} = \arg \min_{\mathcal{Z}} F(\mathcal{C}^{t+1}, B^{t+1}, \mathcal{E}_1^{t+1}, \mathcal{D}^{t+1}, \mathcal{Z}, \mathcal{E}_2^t) + \frac{\rho_5}{2} \|\mathcal{Z} - \mathcal{Z}^t\|^2; \\ \mathcal{E}_2^{t+1} = \arg \min_{\mathcal{E}_2} F(\mathcal{C}^{t+1}, B^{t+1}, \mathcal{E}_1^{t+1}, \mathcal{D}^{t+1}, \mathcal{Z}^{t+1}, \mathcal{E}_2) + \frac{\rho_6}{2} \|\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2^t\|^2. \end{cases}$$

其中 $\rho_i > 0, i \in [6], t$ 表示迭代次数。



算法和收敛性分析

算法 2: 求解 LTD 模型的 PAM 算法

- 1 **输入:** 高光谱数据 \mathcal{H} , 参数 $\{\lambda_i\}_{i=1}^6$ 和 $\{\rho_i\}_{i=1}^6$ 。设置 $t \leftarrow 0$ 。
 - 2 分别更新 C^{t+1} , B^{t+1} , \mathcal{E}_1^{t+1} , \mathcal{D}^{t+1} , \mathcal{Z}^{t+1} , \mathcal{E}_2^{t+1} ;
 - 3 若满足停止准则, 则令 $\mathcal{E}_1^* := \mathcal{E}_1^{t+1}$, $\mathcal{E}_2^* := \mathcal{E}_2^{t+1}$; 否则, 令 $t \leftarrow t + 1$, 并返回步骤 2;
 - 4 通过公式 (17) 计算最终检测图 T ;
 - 5 **输出:** 最终检测图 T 。
-

定理 9

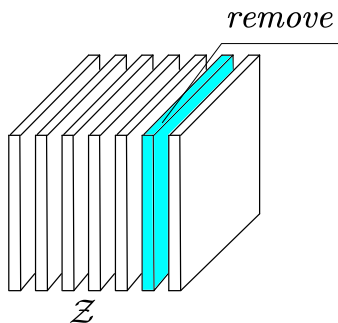
设序列 $\{\mathcal{W}^t\}$ 由算法 2 生成。若序列 \mathcal{Z}^t 或 \mathcal{E}_2^t 中至少有一个是有界的, 则序列 $\{\mathcal{W}^t\}$ 收敛到目标函数 $F(\mathcal{W})$ 的一个稳定点。



带有验证机制的秩削减策略

定理 10

存在一个自然数 $t^\# \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $t \geq t^\#$, 均有 $\Gamma(\mathcal{Z}^t) = \Gamma(\mathcal{Z}^{t+1})$, 其中 $\Gamma(\mathcal{Z}) = \{j \mid \|\mathcal{Z}(:, j, :)\| \neq 0, j = 1, \dots, r\}$.



算法 3: 应用于算法 2 的带有验证机制的秩削减策略

- 1 **输入:** 高光谱数据 \mathcal{H} , 参数 $\{\lambda_i\}_{i=1}^6$ 和 $\{\rho_i\}_{i=1}^6$ 。设置 $\mathbb{S} = \emptyset$ 且 $t \leftarrow 0$ 。
 - 2 使用算法 2 中的步骤 2 更新 C^{t+1} 、 B^{t+1} 、 \mathcal{E}_1^{t+1} 、 \mathcal{D}^{t+1} 、 \mathcal{Z}^{t+1} 和 \mathcal{E}_2^{t+1} ;
 - 3 **如果** $\mathbb{S} \neq \emptyset$ **则**
 - 4 计算 $\mathcal{Z}_{sub}^{t+1} = \text{Prox}_{\hat{\lambda}_4 \psi}(\lambda_6(C^{t+1} - \mathcal{E}_2^{t+1})^H * \mathcal{D}_{sub}^t(:, \mathbb{S}, :)/(\lambda_6 + \rho_5))$;
 - 5 在 \mathcal{Z}_{sub}^{t+1} 中识别出 Frobenius 范数最大的前 5 个侧切片 (若总数少于 5, 则全部选取), 并将其索引记为集合 \mathbb{S}_1 ;
 - 6 令 $\mathcal{Z}^{t+1} = [\mathcal{Z}^{t+1}, \mathcal{Z}_{sub}^{t+1}(:, \mathbb{S}_1, :)]$ 且 $\mathcal{D}^{t+1} = [\mathcal{D}^{t+1}, \mathcal{D}_{sub}^t(:, \mathbb{S}_1, :)]$;
 - 7 令集合 \mathbb{S} 为 \mathcal{Z}^{t+1} 中全零侧切片的索引集, 并定义 $\mathcal{D}_{sub}^{t+1} = \mathcal{D}^{t+1}(:, \mathbb{S}, :)$ 。然后, 从 \mathcal{D}^{t+1} 和 \mathcal{Z}^{t+1} 中移除索引在 \mathbb{S} 中的侧切片;
 - 8 若满足停止准则, 则令 $\mathcal{E}_1^* := \mathcal{E}_1^{t+1}$, $\mathcal{E}_2^* := \mathcal{E}_2^{t+1}$ 并终止迭代; 否则, 令 $t \leftarrow t + 1$, 并返回步骤 2;
 - 9 通过公式 (17) 计算最终检测图 T ;
 - 10 **输出:** 最终检测图 T 。
-



数值实验

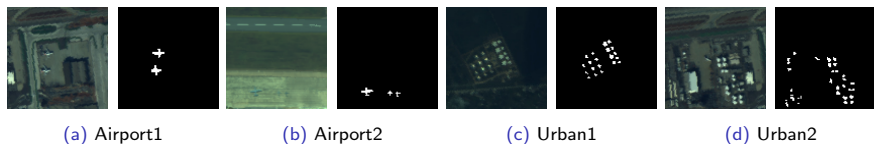


图: ABU 数据集中部分场景的伪彩色图像及其对应的真实地物标注



图: MVTec 数据集中部分榛子样本的彩色图像及其对应的真实缺陷标注



检测性能对比: ABU 数据集

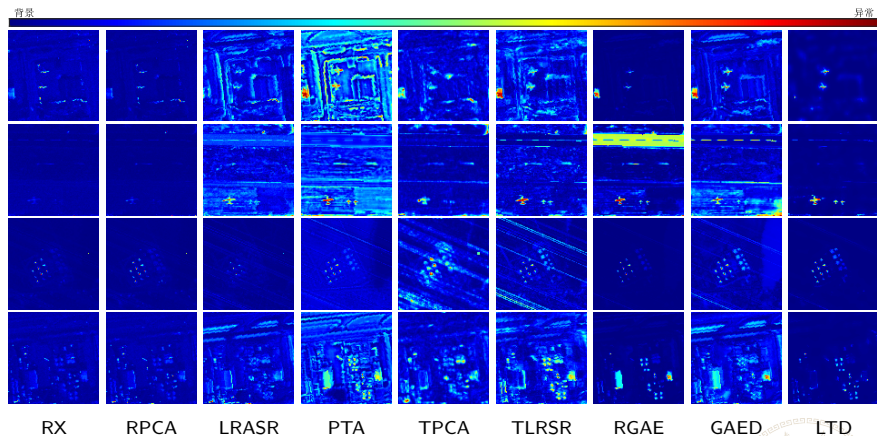


图: 不同方法在 ABU 数据集上的异常检测结果图



表: 不同方法在 ABU 数据集上的 AUC 值 (%) 与运行时间 (秒)

| 数据集 | 指标 | RX | RPCA | LRASR | PTA | TPCA | TLRSR | RGAE | GAED | LTD |
|----------|---------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|
| Airport1 | AUC (%) | 84.04 | 84.28 | 87.70 | 90.96 | 88.11 | 94.58 | 96.40 | 96.77 | 99.73 |
| | 时间 (秒) | 0.05 | 4.62 | 20.06 | 15.77 | 18.63 | 2.50 | 51.88 | 41.10 | 1.66 |
| Airport2 | AUC (%) | 95.26 | 96.27 | 97.95 | 99.55 | 95.26 | 99.49 | 93.25 | 96.81 | 99.95 |
| | 时间 (秒) | 0.06 | 1.93 | 19.45 | 14.68 | 17.93 | 2.28 | 50.00 | 39.15 | 1.89 |
| Urban1 | AUC (%) | 99.46 | 99.57 | 87.03 | 97.70 | 95.45 | 95.42 | 99.73 | 99.59 | 99.93 |
| | 时间 (秒) | 0.05 | 3.98 | 22.87 | 16.69 | 17.98 | 2.40 | 53.78 | 39.84 | 2.13 |
| Urban2 | AUC (%) | 96.92 | 96.58 | 89.13 | 82.58 | 93.00 | 97.11 | 94.90 | 90.18 | 98.30 |
| | 时间 (秒) | 0.06 | 3.85 | 20.30 | 15.99 | 19.32 | 2.49 | 42.26 | 37.99 | 1.89 |

最优结果以粗体标出



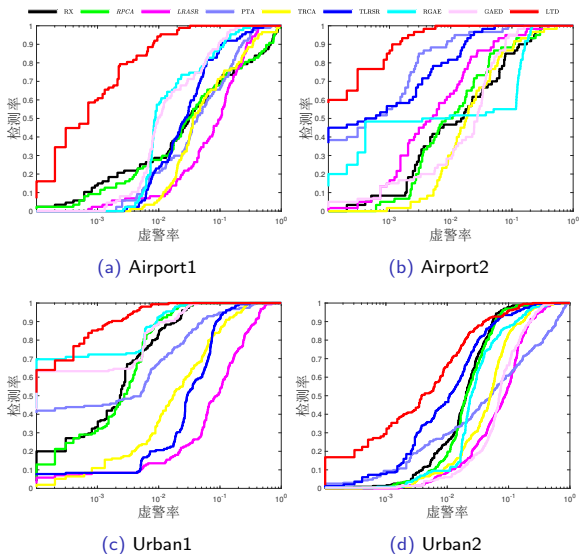


图: 不同方法在四个高光谱数据集上的 ROC 曲线



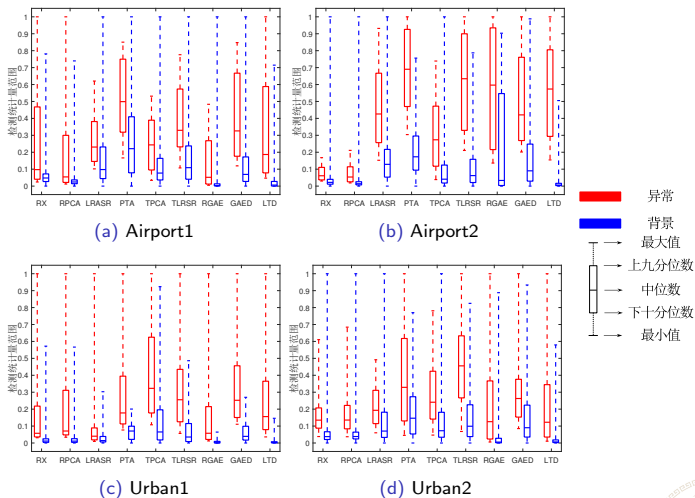


图: 不同方法在四个高光谱数据集上的背景-异常分离箱线图



检测性能对比: MVTEC 数据集

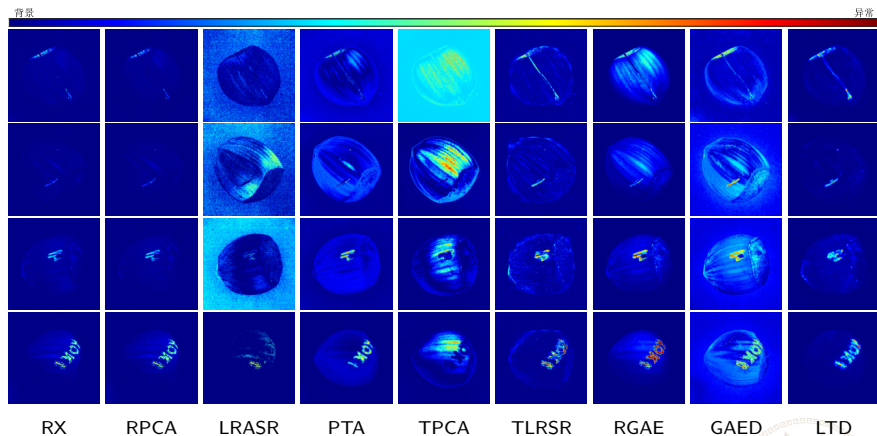


图: 不同方法在 MVTEC 数据集上的异常检测结果图



表: 不同方法在 MVTEC 数据集上的 AUC 值 (%) 与运行时间 (秒)

| 数据集 | 指标 | RX | RPCA | LRASR | PTA | TPCA | TLRSR | RGAE | GAED | LTD |
|-------|---------|-------------|-------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|--------------|
| Crack | AUC (%) | 77.23 | 71.12 | 29.98 | 45.66 | 65.75 | 83.34 | 82.03 | 78.37 | 98.26 |
| | 时间 (秒) | 0.05 | 0.40 | 977.33 | 16.04 | 14.33 | 29.41 | 818.99 | 669.92 | 4.99 |
| Cut | AUC (%) | 89.46 | 91.50 | 33.48 | 72.30 | 56.40 | 91.11 | 88.54 | 86.02 | 99.76 |
| | 时间 (秒) | 0.05 | 0.40 | 991.03 | 16.81 | 13.96 | 32.88 | 837.77 | 662.67 | 4.75 |
| Hole | AUC (%) | 91.26 | 88.50 | 22.93 | 78.77 | 82.01 | 95.75 | 93.88 | 90.34 | 99.25 |
| | 时间 (秒) | 0.05 | 0.40 | 979.06 | 16.26 | 14.62 | 46.29 | 814.96 | 677.04 | 2.62 |
| Print | AUC (%) | 95.70 | 95.60 | 58.68 | 89.03 | 68.48 | 94.21 | 97.05 | 87.42 | 99.87 |
| | 时间 (秒) | 0.04 | 0.40 | 982.01 | 15.31 | 14.00 | 32.08 | 978.39 | 684.22 | 3.44 |

最优结果以粗体标出



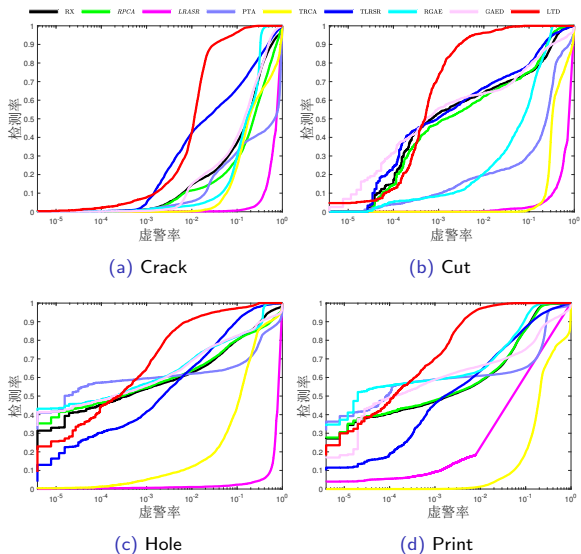


图: 不同方法在 MVTEC 数据集上的 ROC 曲线



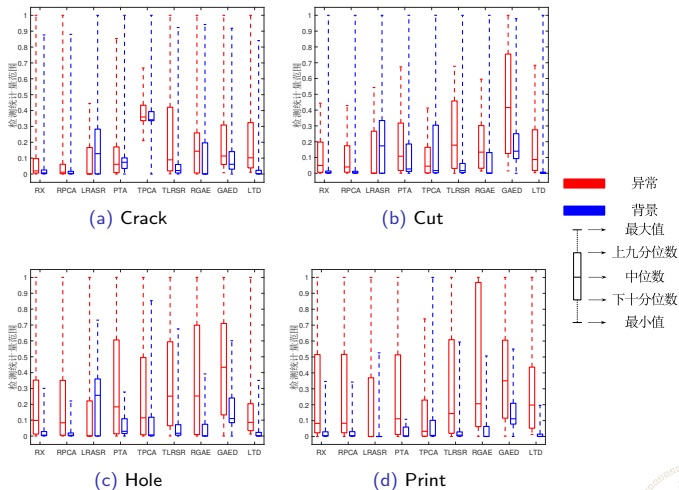


图: 不同方法在 MVTEC 数据集上的背景-异常分离箱线图



参数分析

首先，我们分析参数 b 对算法的影响。该参数直接影响到系数张量 C 与字典矩阵 B 的规模。

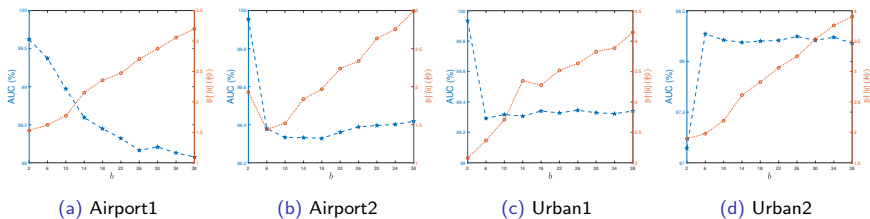


图: 不同 b 取值下 LTD 在 ABU 数据集上的 AUC 值 (%) 及运行时间 (秒)



接下来，我们对模型中的六个正则化参数 $\lambda_i, i \in [6]$ 逐一进行敏感性分析。

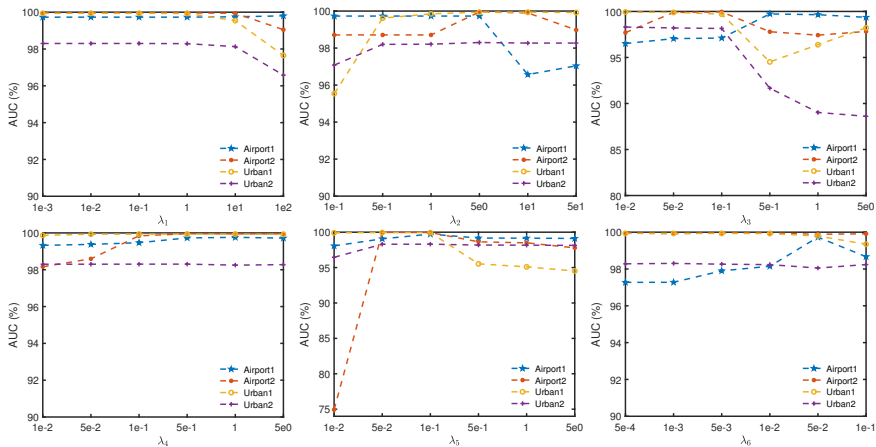
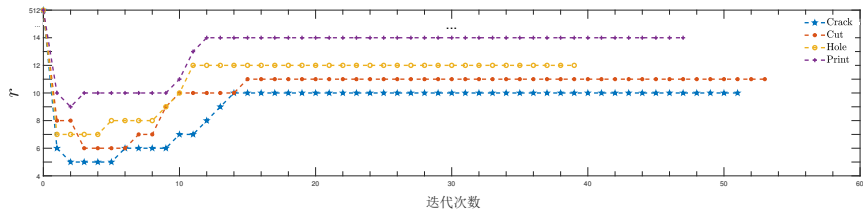
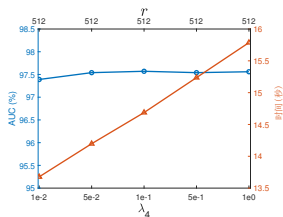


图: 不同 $\lambda_i, i \in [6]$ 取值下 LTD 在 ABU 数据集上的 AUC 值 (%)

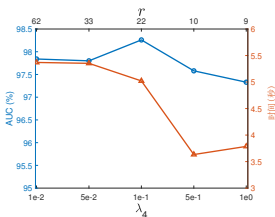


带有验证机制的秩削减策略的有效性分析

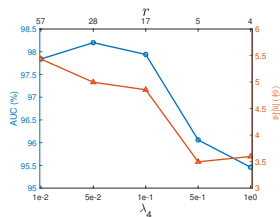
图: 算法 3 中秩参数 r 随迭代次数变化的曲线



(a) 算法 2



(b) 算法 3



(c) 不带验证机制的算法 3

图: Crack 数据集上各算法在不同 λ_4 取值下的 AUC 值 (%)、运行时间 (秒) 及秩参数 r 的变化趋势



统一框架的有效性分析

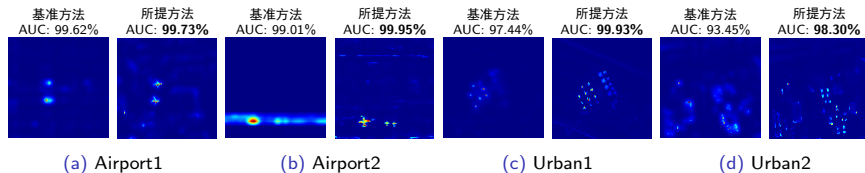


图: 不同方法在 ABU 数据集上的异常检测结果图



本章小结

本章针对高光谱异常检测问题，提出了一种基于分层张量分解的光谱-空间联合异常检测 (LTD) 框架。主要工作与创新点总结如下：

- **模型构建：** 在统一的优化框架内，协同进行光谱冗余抑制与空间低秩结构刻画，首次实现了**光谱异常与空间异常**的联合提取与信息互补。
- **理论保障：** 建立并证明了**张量管秩** 与**张量组稀疏正则化**之间的等价关系。
- **算法设计：** 设计了邻近交替最小化 (PAM) 算法进行求解，并证明了算法的收敛性。
- **效率提升：** 1) 模型层面：分层分解结构从根本上将高维输入拆解为规模更小的子张量，内在降低了计算复杂度；2) 算法层面：提出了一种**带验证机制的自适应秩削减策略**，动态移除全零侧切片，彻底避免了对**大规模 SVD** 的依赖。



目录

- 1 绪论
- 2 主要研究工作
 - 基于字典约束背景表示学习的广义非凸高光谱异常检测 (Ch. 3)
 - 基于分层张量分解的光谱-空间联合高光谱异常检测 (Ch. 4)
 - 基于数据驱动张量字典学习的鲁棒图像对齐 (Ch. 5)
 - 基于统一时空耦合多视图张量模型的交通数据重构与事件检测 (Ch. 6)
- 3 结论与展望
- 4 攻读学位期间的学术或实践成果



背景与模型

给定图像集 $\{I_k\}_{k \in [n_3]} \subset \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ ，将其堆叠构造三阶张量 $\mathcal{Y}(:, :, k) = I_k$ 。为实现图像的精准配准，鲁棒图像对齐的张量优化模型可表示为：

$$\min_{\mathcal{X}, \mathcal{E}, \Gamma} \underbrace{R_1(\mathcal{X})}_{\text{低秩背景}} + \lambda_1 \underbrace{R_2(\mathcal{E})}_{\text{稀疏误差}}, \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{Y} \circ \Gamma = \mathcal{X} + \mathcal{E}.$$

其中，各项的物理含义如下：

- **变换算子 Γ** ： $\Gamma = \{\tau_1, \dots, \tau_{n_3}\}$ ， $\mathcal{Y} \circ \Gamma$ 表示对张量的每个正面切片 $\mathcal{Y}(:, :, k)$ 分别施加对应的空间变换 τ_k （如仿射变换等）。
- **正则化项**： $R_1(\mathcal{X})$ 用于刻画对齐后图像集高度相关的**低秩结构特性**； $R_2(\mathcal{E})$ 用于刻画局部遮挡或噪声的**稀疏特性**。



相关工作与现有局限性

- 核函数

- $R_1(\mathcal{X}) = \sum_{n=1}^3 \alpha_n \|X_n\|_*: \ell_p + \text{ADMM}^{10}$

- $R_1(\mathcal{X}) = \sum_{k=1}^{n_3} \|\hat{X}^{(k)}\|_*, \hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \times_3 U: \text{NCALTS}^{11}$

- 张量分解

- $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \diamond_U \mathcal{Z}: \text{TFM-TTP}^{12}$

① 由于需要对多个大规模矩阵进行奇异值分解 (SVD) 或执行大量的矩阵乘法, 其计算成本十分高昂;

② 它们往往忽略了图像内部以及图像之间的局部性和相似性信息。

¹⁰Zhang, Xiaoqin, et al. "Robust Low-Rank Tensor Recovery with Rectification and Alignment." IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 43(1) (2021): 238–255.

¹¹Qiu, Duo, et al. "Robust Low Transformed Multi-Rank Tensor Methods for Image Alignment." Journal of Scientific Computing 87(1) (2021): 24.

¹²Xia, Sijia, et al. "Tensor Factorization via Transformed Tensor-Tensor Product for Image Alignment." Numerical Algorithms 95(3) (2024): 1251–1289.



张量字典学习模型

用 $\mathcal{L} \times_1 D_1 \times_2 D_2 \times_3 D_3$ 对原始张量 \mathcal{X} 进行近似表示, 并据此构建如下张量字典学习模型:

$$\min_{\mathcal{L}, D_i, \mathcal{E}, \Gamma} R_1(\mathcal{L}) + \lambda_1 R_2(\mathcal{E}), \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{Y} \circ \Gamma = \mathcal{L} \times_1 D_1 \times_2 D_2 \times_3 D_3 + \mathcal{E}. \quad (19)$$

其中, 矩阵 $D_i \in \mathbb{R}^{n_i \times r_i}$, $i \in [3]$ 表示第 i 个方向上的字典矩阵, $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_2 \times r_3}$ 为对应的低维编码系数张量。正则化项 $R_1(\mathcal{L})$ 和 $R_2(\mathcal{E})$ 分别用于刻画系数张量 \mathcal{L} 的低秩结构特性以及误差张量 \mathcal{E} 的稀疏性。



定理 11

在取 $R_1(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^3 \text{rank}(\mathcal{L}_{(i)})$ 的条件下, 问题 (19) 与如下无字典模型是等价的:

$$\min_{\mathcal{X}, \mathcal{E}, \Gamma} \sum_{i=1}^3 \text{rank}(\mathcal{X}_{(i)}) + \lambda_1 R_2(\mathcal{E}), \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{Y} \circ \Gamma = \mathcal{X} + \mathcal{E}. \quad (20)$$

该模型正是 $\ell_p + \text{ADMM}$ 所研究的问题。

定理 12

在取 $R_1(\mathcal{L}) = \text{rank}_t(\mathcal{L})$ 且 $D_3 = I$ 的条件下, 问题 (19) 与如下基于管秩的无字典模型是等价的:

$$\min_{\mathcal{X}, \mathcal{E}, \Gamma} \text{rank}_t(\mathcal{X}) + \lambda_1 R_2(\mathcal{E}), \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{Y} \circ \Gamma = \mathcal{X} + \mathcal{E}. \quad (21)$$

该模型正是 NCALTS 所研究的问题。



定理 11 和 12 在理论上论证了该模型与基于 Tucker 秩和管秩的无字典模型之间的等价关系。而在算法设计中，该模型将大规模张量表示为小尺寸系数张量与字典矩阵的乘积形式，从而大幅降低计算复杂度。



融合广义超拉普拉斯正则化的字典学习

在基于字典学习的建模框架中，字典的构造方式直接影响到模型的性能。现有的字典学习策略仍然相对粗糙，它们大致可以归为以下两类。

- 1) 固定字典：采用某种方法事先从原始数据张量中学习一个固定的字典，例如主成分分析（PCA）或其他降维技术；
- 2) 动态字典：在模型优化过程中同步学习一个动态的字典，具体实现方式包括在目标函数中对字典施加低秩或平滑约束，或者通过加入归一化约束、正交约束等方法来避免病态解。



局部邻域内相互接近的数据点往往具有相似的结构特性!

定理 13

令 $\mathcal{X} = \mathcal{L} \times_1 D_1 \times_2 D_2 \times_3 D_3$, 并定义算子 ∇ 为一个线性梯度算子, 其非零元素满足 $\nabla_{i,i} = 1$ 、 $\nabla_{i,i+1} = -1$ 。则对任意 $i \in [3]$, 有

$$\nabla X_{(i)} \in \text{span}\{\nabla D_i\}.$$

其中, $\text{span}\{\nabla D_i\}$ 表示由矩阵 ∇D_i 的列向量所张成的线性空间; 符号 $\nabla X_{(i)} \in \text{span}\{\nabla D_i\}$ 表示 $\nabla X_{(i)}$ 的所有列向量均属于该线性空间。



在字典学习过程中引入如下广义超拉普拉斯正则化项，以显式刻画字典矩阵所蕴含的局部流形结构：

$$\frac{1}{2} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \|D_i(m_1, :) - D_i(m_2, :)\|_p^p W_{m_1 m_2}^i = \|G_i D_i\|_p^p, \quad p \in (0, 2]. \quad (22)$$

其中 W^i 是权重矩阵，其定义为

$$W_{m_1 m_2}^i = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\|X_{(i)}(m_1, :) - X_{(i)}(m_2, :)\|^2}{\sigma^2}\right), & X_{(i)}(m_1, :) \text{ 与 } X_{(i)}(m_2, :) \text{ 是相邻的;} \\ 0, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

广义超拉普拉斯矩阵 $G_i \in \mathbb{R}^{n_i(n_i-1)/2 \times n_i}$ 定义为 $G_i(g, m_1) = -G_i(g, m_2)$ ，且

$$G_i(g, m_1) = \begin{cases} \sqrt[p]{W^i(m_1, m_2)}, & g = (m_1 - 1)n_i + m_2 - m_1(m_1 + 1)/2; \\ 0, & \text{其他情况.} \end{cases}$$



例 14

当 $n_i = 4$ 时, 广义超拉普拉斯矩阵 G_i 具有如下具体形式:

$$G_i = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{W_{12}^i} - \sqrt[3]{W_{12}^i} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt[3]{W_{13}^i} & 0 & -\sqrt[3]{W_{13}^i} & 0 \\ \sqrt[3]{W_{14}^i} & 0 & 0 & -\sqrt[3]{W_{14}^i} \\ 0 & \sqrt[3]{W_{23}^i} & -\sqrt[3]{W_{23}^i} & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{W_{24}^i} & 0 & -\sqrt[3]{W_{24}^i} \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{W_{34}^i} & -\sqrt[3]{W_{34}^i} \end{pmatrix}.$$



注 2.1

当在正则项 (22) 中取 $p = 2$, 并令 $G_i = K^i - W^i$, 其中

$$K^i(m_1, m_2) = \begin{cases} \sum_{m_2} W_{m_1 m_2}^i, & m_1 = m_2; \\ 0, & \text{其他情况,} \end{cases}$$

该广义超拉普拉斯正则化项将退化为经典超拉普拉斯正则项 $\frac{1}{2} \text{tr} (D_i^H G_i D_i)$ 。



提出的 DTDL 模型

综合上述分析，并考虑到图像中的元素会受到高斯噪声干扰，我们提出如下的 DTDL 模型，用以对一批线性相关的图像进行对齐与去噪：

$$\min_{\mathcal{L}, D_i, \mathcal{E}, \Gamma} \|\mathcal{L}\|_{\otimes}^{\psi} + \lambda_1 \|\mathcal{E}\|_1^{\psi} + \lambda_2 \sum_{i=1}^3 \|G_i D_i\|_p^p + \frac{\beta}{2} \|\mathcal{L} \times_1 D_1 \times_2 D_2 \times_3 D_3 + \mathcal{E} - \mathcal{Y} \circ \Gamma\|^2. \quad (23)$$



算法描述

在 Γ^0 处对 $\mathcal{Y} \circ \Gamma$ 进行一阶泰勒展开, 可得如下近似:

$$\mathcal{Y} \circ \Gamma \approx \mathcal{Y} \circ (\Gamma^0 + \Delta\Gamma) \approx \mathcal{Y} \circ \Gamma^0 + \text{fold}_3 \left(\left(\sum_{k=1}^{n_3} J_k \Delta\Gamma \epsilon_k \epsilon_k^H \right)^H \right).$$

其中 $\Gamma^0 = [\tau_1^0, \tau_2^0, \dots, \tau_{n_3}^0]$, J_k 表示第 k 个切片 $Y^{(k)}$ 关于变换参数 τ_k^0 的雅可比 (Jacobian) 矩阵。



基于上述线性化近似, 问题 (23) 可被松弛为如下优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{L}, D_i, \mathcal{E}, \Delta\Gamma} \|\mathcal{L}\|_{\otimes}^{\psi} + \lambda_1 \|\mathcal{E}\|_1^{\psi} + \lambda_2 \sum_{i=1}^3 \|G_i D_i\|_p^p \\ + \frac{\beta}{2} \left\| \mathcal{L} \times_1 D_1 \times_2 D_2 \times_3 D_3 + \mathcal{E} - \mathcal{Y} \circ \Gamma^0 - \Delta\tilde{\Gamma} \right\|^2. \quad (24) \end{aligned}$$

其中 $\Delta\tilde{\Gamma} := \text{fold}_3((\sum_{k=1}^{n_3} J_k \Delta\Gamma \epsilon_k \epsilon_k^H)^H)$.



广义高斯-牛顿算法

算法 4: 求解 DTDL 的广义高斯-牛顿算法

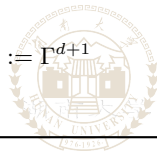
- 1 **输入:** 观测张量 $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 和参数 λ_1, λ_2 。
- 2 **初始化:** 设置 $\Gamma^0 = [\tau_1^0, \tau_2^0, \dots, \tau_{n_3}^0]$, 并令 $d \leftarrow 0$ 。
- 3 根据当前变换参数 τ_k^d , 更新雅可比矩阵

$$J_k = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\text{vec}(\mathcal{Y}(:, :, k) \circ x)}{\|\text{vec}(\mathcal{Y}(:, :, k) \circ x)\|} \right) \Big|_{x=\tau_k^d}, \forall k \in [n_3];$$

- 4 对 \mathcal{Y} 的每个正面切片进行变换与归一化:

$$(\mathcal{Y} \circ \Gamma^d) (:, :, k) = \frac{\mathcal{Y}(:, :, k) \circ \tau_k^d}{\|\mathcal{Y}(:, :, k) \circ \tau_k^d\|}, \forall k \in [n_3];$$

- 5 通过求解线性化子问题 (24), 更新 $(\mathcal{L}^{d+1}, D_i^{d+1}, \mathcal{E}^{d+1}, \Delta\Gamma^{d+1})$;
- 6 根据 $\Gamma^{d+1} = \Gamma^d + \Delta\Gamma^{d+1}$ 更新域变换参数;
- 7 若满足停止准则, 则令 $\mathcal{L}^* := \mathcal{L}^{d+1}$, $D_i^* := D_i^{d+1}$, $\mathcal{E}^* := \mathcal{E}^{d+1}$, $\Gamma^* := \Gamma^{d+1}$ 并终止迭代; 否则, 令 $d \leftarrow d + 1$, 并返回步骤 3;
- 8 **输出:** 最优解 $\mathcal{L}^*, D_i^*, \mathcal{E}^*, \Gamma^*$ 。



为求解子问题 (24), 我们采用邻近线性化的交替方向乘子法 (ADMM)。为实现变量之间的有效解耦, 引入辅助变量矩阵 C_i , 从而将原问题转化为具有可分结构的形式。由此, 可构造如下增广拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(\mathcal{L}, \mathcal{D}, \mathcal{C}, \mathcal{E}, \Delta\Gamma; \mathcal{Q}) := & \|\mathcal{L}\|_{\oplus}^{\psi} + \lambda_1 \|\mathcal{E}\|_1^{\psi} + \sum_{i=1}^3 \left(\lambda_2 \|C_i\|_p^p + \langle Q_i, G_i D_i - C_i \rangle \right. \\ & \left. + \frac{\alpha}{2} \|G_i D_i - C_i\|^2 \right) + \frac{\beta}{2} \left\| \mathcal{L} \times_1 D_1 \times_2 D_2 \times_3 D_3 + \mathcal{E} - \mathcal{Y} \circ \Gamma^0 - \Delta\tilde{\Gamma} \right\|^2. \quad (25) \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{D} = (D_1, D_2, D_3)$, $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$ 且 $\mathcal{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ 。



邻近线性化 ADMM 算法

算法 5: 求解子问题 (24) 的邻近线性化 ADMM 算法

- 1 **输入:** 参数 $\lambda_1, \lambda_2, \beta, \rho, \delta$ 和函数 ψ 。
- 2 **初始化:** 设置 $\mathcal{L}^0, \mathcal{D}^0, \mathcal{C}^0, \mathcal{E}^0, \Delta\Gamma^0, \mathcal{Q}^0, \mathcal{W}^0, \alpha^0$, 并令 $t \leftarrow 0$ 。
- 3 分别更新 $\mathcal{L}^{t+1}, \mathcal{D}^{t+1}, \mathcal{C}^{t+1}, \mathcal{E}^{t+1}$ 和 $\Delta\Gamma^{t+1}$;
- 4 根据下式更新乘子 \mathcal{Q}^{t+1} 和参数 α^{t+1} :

$$Q_i^{t+1} = Q_i^t + \alpha^t (G_i D_i^{t+1} - C_i^{t+1}), \quad \alpha^{t+1} = \rho \alpha^t, \quad i \in [3];$$

- 5 若满足停止准则, 则令 $\mathcal{L}^* := \mathcal{L}^{t+1}, D_i^* := D_i^{t+1}, \mathcal{E}^* := \mathcal{E}^{t+1}, \Gamma^* := \Gamma^{t+1}$ 并终止迭代; 否则, 令 $t \leftarrow t + 1$, 并返回步骤 3;
- 6 **输出:** 最优解 $\mathcal{L}^*, \mathcal{D}^*, \mathcal{E}^*, \Delta\Gamma^*$ 。



收敛性分析

将所有变量统一记为 $\mathcal{T} := (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$, 其中 $\mathcal{T}_1 = (\mathcal{L}, \mathcal{D}, \mathcal{C}, \mathcal{E}, \Delta\Gamma)$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{Q}$.

定理 15

设 $\{\mathcal{T}^t\}_{t \in \mathbb{N}^+}$ 为算法 5 生成的迭代序列。若序列 $\{\mathcal{T}_1^t\}_{t \in \mathbb{N}^+}$ 有界, 则 $\{\mathcal{T}^t\}_{t \in \mathbb{N}^+}$ 的任意聚点均为优化问题 (24) 的一个 *KKT* 点。



数值实验

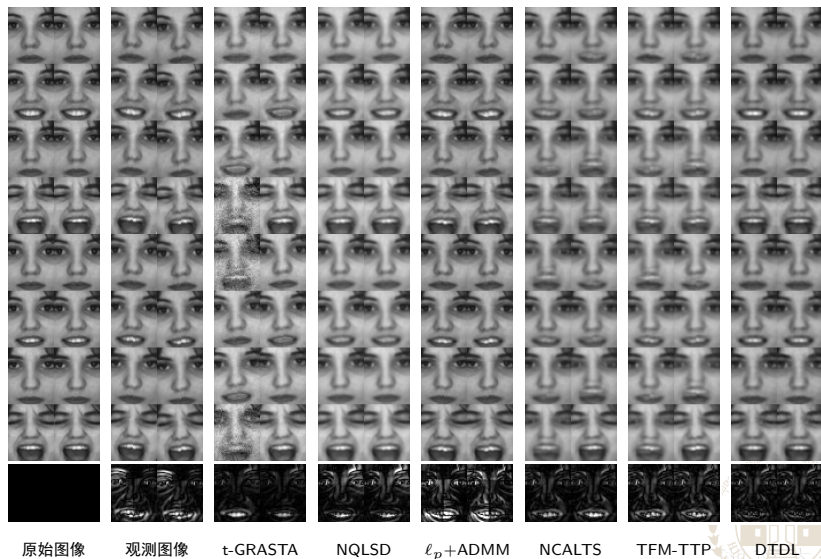


图: 无噪声条件下不同方法在 AR 人脸数据库上的图像对齐结果图

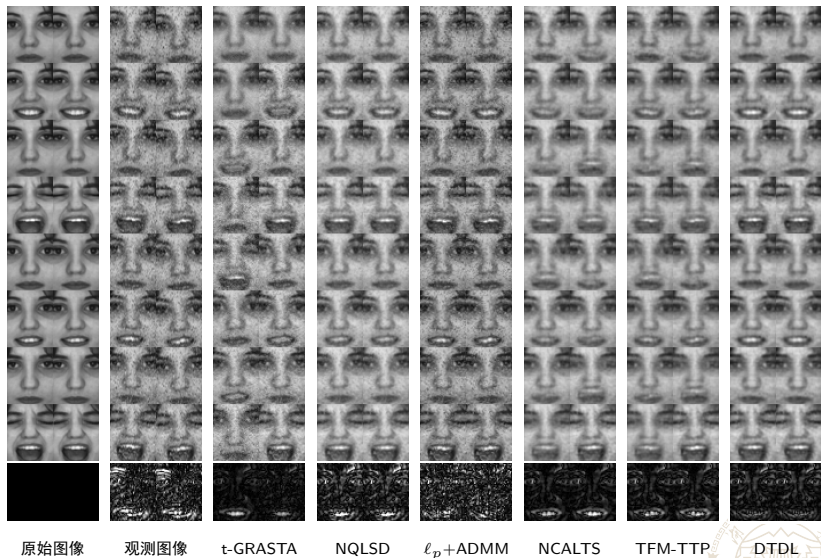


图: 10% 椒盐噪声干扰下不同方法在 AR 人脸数据库上的图像对齐结果图

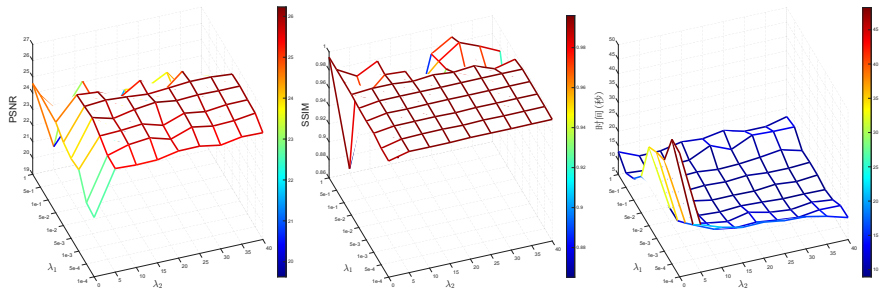
表: 不同方法在 AR 人脸数据库不同椒盐噪声水平下的性能

| 方法 | PSNR | | | SSIM | | | 时间 (秒) | | |
|----------------|--------------|--------------|--------------|---------------|---------------|---------------|-------------|--------------|--------------|
| | 0% | 10% | 20% | 0% | 10% | 20% | 0% | 10% | 20% |
| RASL | 23.31 | 22.62 | 21.13 | 0.9921 | 0.9913 | 0.9886 | 15.15 | 20.55 | 21.13 |
| t-GRASTA | 21.13 | 20.55 | 19.96 | 0.9866 | 0.9849 | 0.9839 | 35.53 | 35.35 | 34.28 |
| NQLSD | 23.20 | 23.18 | 21.85 | 0.9923 | 0.9923 | 0.9901 | 11.69 | 13.91 | 23.69 |
| ℓ_p +ADMM | 24.65 | 23.34 | 21.34 | 0.9928 | 0.9924 | 0.9887 | 21.48 | 26.62 | 27.19 |
| NCALTS | 24.27 | 23.58 | 22.18 | 0.9933 | 0.9925 | 0.9905 | 20.10 | 23.38 | 24.56 |
| TFM-TTP | 24.79 | 24.04 | 22.36 | 0.9940 | 0.9933 | 0.9909 | 15.51 | 14.92 | 14.65 |
| DTDL | 26.26 | 24.77 | 23.04 | 0.9961 | 0.9946 | 0.9924 | 7.92 | 19.04 | 22.77 |

最优结果以粗体标出



参数分析

图: 不同 λ_1 和 λ_2 取值下 DTDL 的性能指标及运行时间曲面图

低秩编码的作用

表: 不同椒盐噪声水平下基于不同系数张量编码的 DTDL 性能

| 编码 | PSNR | | | SSIM | | | 时间 (秒) | | |
|----------------------------------|--------------|--------------|--------------|---------------|---------------|---------------|-------------|--------------|--------------|
| | 0% | 10% | 20% | 0% | 10% | 20% | 0% | 10% | 20% |
| $\ \mathcal{L}\ _1^\psi$ | 24.44 | 24.41 | 22.56 | 0.9924 | 0.9939 | 0.9914 | 31.61 | 38.99 | 32.78 |
| $\ \mathcal{L}\ _{TF}^\psi$ | 25.92 | 24.41 | 22.73 | 0.9956 | 0.9941 | 0.9919 | 10.81 | 14.93 | 25.58 |
| $\ \mathcal{L}\ _{\otimes}^\psi$ | 26.26 | 24.77 | 23.04 | 0.9961 | 0.9946 | 0.9924 | 7.92 | 19.04 | 22.77 |

最优结果以粗体标出



广义超拉普拉斯正则化的作用

表: 不同椒盐噪声水平下基于不同字典正则化项的 DTDL 性能

| 正则化 | PSNR | | | SSIM | | | 时间 (秒) | | |
|----------|--------------|--------------|--------------|---------------|---------------|---------------|-------------|--------------|--------------|
| | 0% | 10% | 20% | 0% | 10% | 20% | 0% | 10% | 20% |
| 无正则化 | 24.33 | 24.21 | 22.60 | 0.9937 | 0.9937 | 0.9917 | 27.35 | 39.71 | 24.94 |
| 全变分 (TV) | 21.30 | 19.96 | 18.48 | 0.9860 | 0.9821 | 0.9776 | 21.38 | 21.82 | 24.39 |
| 超拉普拉斯 | 26.26 | 24.32 | 22.43 | 0.9961 | 0.9940 | 0.9913 | 7.92 | 16.06 | 14.81 |
| 广义超拉普拉斯 | 26.26 | 24.77 | 23.04 | 0.9961 | 0.9946 | 0.9924 | 7.92 | 19.04 | 22.77 |

最优结果以粗体标出



本章小结

本章围绕鲁棒图像对齐问题，提出了一种新颖的**数据驱动张量字典学习 (DTD L) 模型**。主要工作与创新点总结如下：

- **模型构建**：将底层张量分解为低维系数张量与三个字典矩阵，并引入广义超拉普拉斯正则化，在降低计算复杂度的同时，有效保持了图像内部与图像之间的局部结构特征。
- **理论保障**：建立并证明了所提 DTD L 模型与基于 Tucker 秩和管秩的无字典模型之间的等价关系。
- **算法设计**：针对模型中包含非线性变换 Γ 的复杂优化问题，设计了一种高效的双层嵌套求解策略（外层广义高斯-牛顿法 + 内层邻近线性化 ADMM），并进行了收敛性分析。



目录

- 1 绪论
- 2 主要研究工作
 - 基于字典约束背景表示学习的广义非凸高光谱异常检测 (Ch. 3)
 - 基于分层张量分解的光谱-空间联合高光谱异常检测 (Ch. 4)
 - 基于数据驱动张量字典学习的鲁棒图像对齐 (Ch. 5)
 - 基于统一时空耦合多视图张量模型的交通数据重构与事件检测 (Ch. 6)
- 3 结论与展望
- 4 攻读学位期间的学术或实践成果



背景与模型

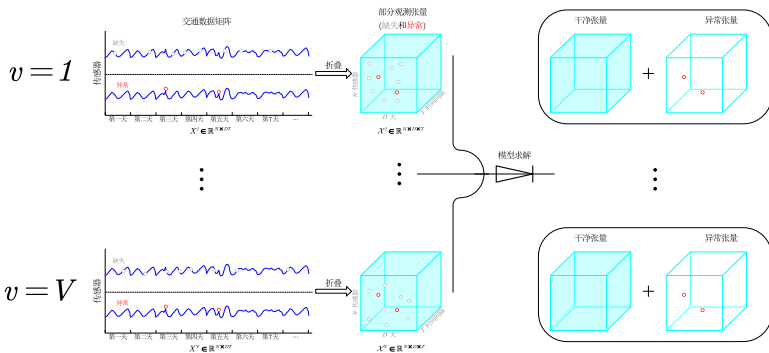


图: 交通数据重构与事件检测示意图



相关工作与现有局限性

- 单视图多任务: RTC¹³

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{X}, \mathcal{E}} \quad & \sum_{i=1}^N \|X^{(i)}\|_* + \lambda \|E^{(1)}\|_{2,1} \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{M}_\Omega = (\mathcal{X} + \mathcal{E})_\Omega \end{aligned}$$

忽略了多视图数据之间的互补信息

- 多视图单任务: MVLR¹⁴

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{X}^i, \mathcal{Z}, E^i} \quad & \sum_{i=1}^v \|\mathcal{X}^i\|_{r,*} + \lambda \|\mathcal{Z}\|_{r,*} + \gamma \sum_{i=1}^v \|E^i\|_{2,1}, \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{X}^i = \text{fold}(X^{i\top}), \mathcal{Z} = \Phi [Z^1, Z^2, \dots, Z^v], \\ & X^i = \mathcal{X}^i Z^i + E^i, \mathcal{P}_\Omega(X^i) = \mathcal{P}_\Omega(M^i), \end{aligned}$$

关注于数据重构, 未能有效耦合多视图间的异常关联信息

¹³YUE HU and DANIEL B. WORK. "Robust Tensor Recovery with Fiber Outliers for Traffic Events." ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data (2020).

¹⁴He, et al. "An Integrated Intra-View and Inter-View Framework for Multiple Traffic Variable Data Simultaneous Recovery." IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems (2024).



统一耦合的多视图、多任务张量框架

不同于模型 MVLR 中将交通数据 X^v 简单视为矩阵，我们将其构建为三阶张量 $\mathcal{X}^v \in \mathbb{R}^{N \times D \times T}$ 。这种张量化表征能够自然地保持交通流数据中固有的高维时空结构。据此，我们将矩阵优化问题推广至张量空间，构建如下张量自表示模型：

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathcal{X}^v, \mathcal{Z}^v, \mathcal{E}^v} \quad & \mathcal{R}_1(\mathcal{Z}^1, \dots, \mathcal{Z}^V) + \gamma \sum_{v=1}^V \mathcal{R}_2(\mathcal{E}^v) \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{X}^v = \mathcal{X}^v * \mathcal{Z}^v + \mathcal{E}^v, \mathcal{P}_{\Omega_v}(\mathcal{X}^v) = \mathcal{P}_{\Omega_v}(\mathcal{M}^v), v = 1, \dots, V. \end{aligned} \quad (26)$$



定理 16

假设矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n_1 n_3 \times n_2}$ 和 $Z \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ 满足 $X = XZ$ 。则必存在对应的三阶张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 和 $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2 \times n_3}$ 满足张量自表示关系 $\mathcal{X} = \mathcal{X} * \mathcal{Z}$ 。其中, \mathcal{X} 可由 X 通过折叠算子构造, 即 $\mathcal{X} = \text{fold}_2(X^H)$, 而 \mathcal{Z} 可通过 *IFFT* 得到, 即 $\mathcal{Z}(:, t, :) = \text{ifft}(\tilde{\mathcal{Z}}(:, t, :), [], 3)$, 其中 $\tilde{\mathcal{Z}}(:, t, j) = Z(:, t)$, $t \in [n_2]$, $j \in [n_3]$ 。需要指出的是, 上述结论的逆命题在一般情况下并不成立。

定理 17

设 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 和 $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2 \times n_3}$ 满足张量自表示 $\mathcal{X} = \mathcal{X} * \mathcal{Z}$ 。若对张量 \mathcal{Z} 的正面切片施加限制条件 $Z^{(1)} = Z$ 且 $Z^{(2)} = \dots = Z^{(n_3)} = 0$, 则存在矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n_1 n_3 \times n_2}$ 满足矩阵自表示 $X = XZ$, 其中矩阵 X 可由张量 \mathcal{X} 通过模 2 展开构造, 即 $X = \mathcal{X}_{(2)}^H$ 。



双重跨视图结构耦合

为刻画底层交通模式在不同观测视图之间的一致性，我们采用低秩张量近似来挖掘各子空间表示张量 \mathcal{Z}^v 之间潜在的高阶相关结构。为此，构造级联张量 \mathcal{Z} ，使其满足 $\mathcal{Z}(:, :, v) = \mathcal{Z}_{(3)}^v$ ，并在此基础上引入如下低秩正则项：

$$\mathcal{R}_1(\mathcal{Z}) = \text{rank}_t(\mathcal{Z}).$$



由交通事故或突发拥堵引发的大尺度异常，往往会在多个观测视图中同步出现。下图中就能看到这种关联，其中黄色区域对应一次交通拥堵事件，速度和流量在时间上同步下降，而占有率则显著升高。

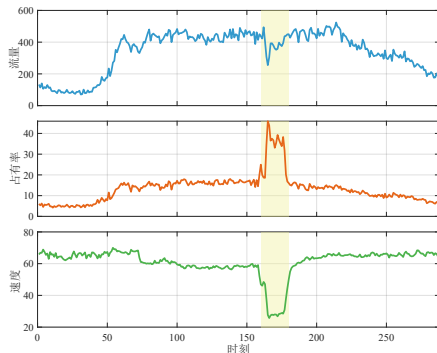


图: PeMS-D8 数据集中 1 号检测器的流量、占有率与速度之间的关系



基于上述观察，我们将所有视图的残差统一表示为一个四阶张量 $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{N \times D \times T \times V}$ ，其中 $\mathcal{E}(:, :, :, v) = \mathcal{E}^v$ 。进一步地，为刻画异常在视图维度上的同步稀疏性，引入如下混合范数正则项：

$$\mathcal{R}_2(\mathcal{E}) = \|\mathcal{E}\|_{F,0} = \sum_{i,j,k} \|\mathcal{E}(i,j,k, :)\|^0.$$



广义非凸松弛

我们采用一种广义非凸松弛函数来同时逼近低秩性与稀疏性约束，其数学形式定义如下：

$$\|\mathcal{Z}\|_{\oplus}^{\phi} := \mathcal{R}_1(\mathcal{Z}) = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^V \sum_{i=1}^{\min\{T, DN\}} \phi\left(\sigma_i\left(\bar{Z}^{(k)}\right)\right),$$

$$\|\mathcal{E}\|_{T^4 F}^{\psi} := \mathcal{R}_2(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^T \psi(\|\mathcal{E}(i, j, k, :)\|).$$

其中， $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 和 $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 为非凸松弛函数。



时空正则化

在交通网络中，交通数据在空间路段、周周期及时间间隔上通常表现出渐进变化的特性。具体而言，相邻路段、连续周的同一时刻以及相邻时间间隔之间的观测值差异极小。为了量化这种稳定性，我们计算了相邻观测点在对应位置上的差分。令 $\mathcal{X}(n, d, t)$ 表示第 n 个路段、第 d 天、第 t 个时间段的交通数据，归一化差分定义如下：

$$\Delta_N(n, d, t) = \frac{|\mathcal{X}(n, d, t) - \mathcal{X}(n + 1, d, t)|}{\max_{n, d, t} |\mathcal{X}(n, d, t) - \mathcal{X}(n + 1, d, t)|},$$

$$\Delta_D(n, d, t) = \frac{|\mathcal{X}(n, d, t) - \mathcal{X}(n, d + 7, t)|}{\max_{n, d, t} |\mathcal{X}(n, d, t) - \mathcal{X}(n, d + 7, t)|},$$

$$\Delta_T(n, d, t) = \frac{|\mathcal{X}(n, d, t) - \mathcal{X}(n, d, t + 1)|}{\max_{n, d, t} |\mathcal{X}(n, d, t) - \mathcal{X}(n, d, t + 1)|}.$$



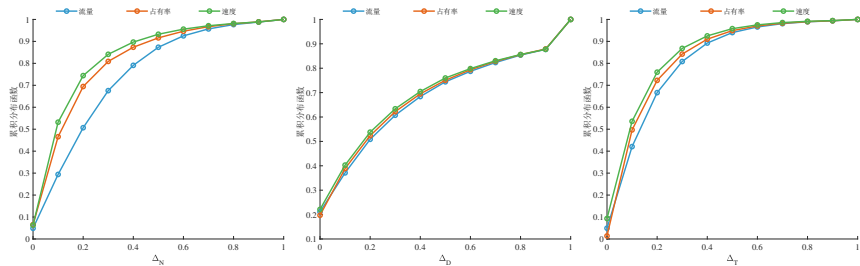


图: PeMS-D8 数据集上归一化差分 Δ_N 、 Δ_D 与 Δ_T 的累积分布函数



USCMT 模型

我们构建的 USCMT 模型可表述为如下优化问题:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathcal{X}^v, \mathcal{Z}^v, \mathcal{E}^v} \quad & \|\mathcal{Z}\|_{\oplus}^{\phi} + \gamma \|\mathcal{E}\|_{T^4 F}^{\psi} + \frac{\lambda}{2} \sum_{v=1}^V \sum_{u=1}^3 \|\mathcal{X}^v \times_u D_u\|^2 + \sum_{v=1}^V \delta_{\mathbb{S}^v}(\mathcal{X}^v) \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{X}^v = \mathcal{X}^v * \mathcal{Z}^v + \mathcal{E}^v, v = 1, \dots, V. \end{aligned} \quad (27)$$

其中, $\mathcal{X}^v \in \mathbb{R}^{N \times D \times T}$ 、 $\mathcal{Z}^v \in \mathbb{R}^{D \times D \times T}$ 以及 $\mathcal{E}^v \in \mathbb{R}^{N \times D \times T}$ 分别表示第 v 个视图对应的重构张量、子空间表示张量与异常张量。集合 $\mathbb{S}^v = \{\mathcal{X}^v \mid \mathcal{P}_{\Omega_v}(\mathcal{X}^v) = \mathcal{P}_{\Omega_v}(\mathcal{M}^v)\}$ 。



算法描述

通过引入辅助变量 \mathcal{G} 、 \mathcal{Y} 和 \mathcal{K} ，原优化问题可被等价地重构为如下形式：

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathcal{X}^v, \mathcal{Z}^v, \mathcal{E}^v} \quad & \|\mathcal{Z}\|_{\otimes}^{\phi} + \gamma \|\mathcal{E}\|_{T^4 F}^{\psi} + \frac{\lambda}{2} \sum_{v=1}^V \sum_{u=1}^3 \|\mathcal{K}^v \times_u D_u\|^2 + \sum_{v=1}^V \delta_{\mathbb{S}^v}(\mathcal{X}^v) \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{X}^v = \mathcal{Y}^v * \mathcal{Z}^v + \mathcal{E}^v, \mathcal{G} = \mathcal{Z}, \mathcal{Y} = \mathcal{X}, \mathcal{K} = \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (28)$$

由此可构造问题 (28) 的增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} & \mathbb{L}_{\rho_i}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{Y}, \mathcal{K}; \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{J}) \\ &= \|\mathcal{Z}\|_{\otimes}^{\phi} + \gamma \|\mathcal{E}\|_{T^4 F}^{\psi} + \frac{\lambda}{2} \sum_{v=1}^V \sum_{u=1}^3 \|\mathcal{K}^v \times_u D_u\|^2 + \sum_{v=1}^V \delta_{\mathbb{S}^v}(\mathcal{X}^v) \\ &+ \sum_{v=1}^V \left(\langle \mathcal{P}^v, \mathcal{X}^v - \mathcal{Y}^v * \mathcal{Z}^v - \mathcal{E}^v \rangle + \frac{\rho_1}{2} \|\mathcal{X}^v - \mathcal{Y}^v * \mathcal{Z}^v - \mathcal{E}^v\|^2 \right) + \langle \mathcal{Q}, \mathcal{G} - \mathcal{Z} \rangle \\ &+ \frac{\rho_2}{2} \|\mathcal{G} - \mathcal{Z}\|^2 + \langle \mathcal{R}, \mathcal{Y} - \mathcal{X} \rangle + \frac{\rho_3}{2} \|\mathcal{Y} - \mathcal{X}\|^2 + \langle \mathcal{J}, \mathcal{K} - \mathcal{X} \rangle + \frac{\rho_4}{2} \|\mathcal{K} - \mathcal{X}\|^2. \end{aligned}$$

其中 $\rho_i > 0, i \in [4]$ 为惩罚参数， \mathcal{P} 、 \mathcal{Q} 、 \mathcal{R} 和 \mathcal{J} 为拉格朗日乘子。



在 ADMM 框架下, 各变量按照如下方式交替更新:

$$\begin{cases} \mathcal{X}^{l+1} \in \operatorname{argmin}_{\mathcal{X}} \mathbb{L}_{\rho_i^l}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}^l, \mathcal{E}^l, \mathcal{G}^l, \mathcal{Y}^l, \mathcal{K}^l; \mathcal{P}^l, \mathcal{Q}^l, \mathcal{R}^l, \mathcal{J}^l); \\ \mathcal{Z}^{l+1} \in \operatorname{argmin}_{\mathcal{Z}} \mathbb{L}_{\rho_i^l}(\mathcal{X}^{l+1}, \mathcal{Z}, \mathcal{E}^l, \mathcal{G}^l, \mathcal{Y}^l, \mathcal{K}^l; \mathcal{P}^l, \mathcal{Q}^l, \mathcal{R}^l, \mathcal{J}^l); \\ \mathcal{E}^{l+1} \in \operatorname{argmin}_{\mathcal{E}} \mathbb{L}_{\rho_i^l}(\mathcal{X}^{l+1}, \mathcal{Z}^{l+1}, \mathcal{E}, \mathcal{G}^l, \mathcal{Y}^l, \mathcal{K}^l; \mathcal{P}^l, \mathcal{Q}^l, \mathcal{R}^l, \mathcal{J}^l); \\ \mathcal{G}^{l+1} \in \operatorname{argmin}_{\mathcal{G}} \mathbb{L}_{\rho_i^l}(\mathcal{X}^{l+1}, \mathcal{Z}^{l+1}, \mathcal{E}^{l+1}, \mathcal{G}, \mathcal{Y}^l, \mathcal{K}^l; \mathcal{P}^l, \mathcal{Q}^l, \mathcal{R}^l, \mathcal{J}^l); \\ \mathcal{Y}^{l+1} \in \operatorname{argmin}_{\mathcal{Y}} \mathbb{L}_{\rho_i^l}(\mathcal{X}^{l+1}, \mathcal{Z}^{l+1}, \mathcal{E}^{l+1}, \mathcal{G}^{l+1}, \mathcal{Y}, \mathcal{K}^l; \mathcal{P}^l, \mathcal{Q}^l, \mathcal{R}^l, \mathcal{J}^l); \\ \mathcal{K}^{l+1} \in \operatorname{argmin}_{\mathcal{K}} \mathbb{L}_{\rho_i^l}(\mathcal{X}^{l+1}, \mathcal{Z}^{l+1}, \mathcal{E}^{l+1}, \mathcal{G}^{l+1}, \mathcal{Y}^{l+1}, \mathcal{K}; \mathcal{P}^l, \mathcal{Q}^l, \mathcal{R}^l, \mathcal{J}^l). \end{cases}$$

并按照如下方式更新拉格朗日乘子:

$$\begin{cases} \mathcal{P}^{v,l+1} = \mathcal{P}^{v,l} + \rho_1^l (\mathcal{X}^{v,l+1} - \mathcal{Y}^{v,l+1} * \mathcal{Z}^{v,l+1} - \mathcal{E}^{v,l+1}); \\ \mathcal{Q}^{l+1} = \mathcal{Q}^l + \rho_2^l (\mathcal{G}^{l+1} - \mathcal{Z}^{l+1}); \\ \mathcal{R}^{l+1} = \mathcal{R}^l + \rho_3^l (\mathcal{Y}^{l+1} - \mathcal{X}^{l+1}); \\ \mathcal{J}^{l+1} = \mathcal{J}^l + \rho_4^l (\mathcal{K}^{l+1} - \mathcal{X}^{l+1}); \\ \rho_i^{l+1} = \beta_i \rho_i^l. \end{cases} \quad (29)$$

其中 l 表示迭代次数, $\beta_i > 1$ ($i \in [4]$) 为常数。接下来将分别阐述各个变量子问题的求解方法。



ADMM 算法

算法 6: 求解 USCMT 模型的 ADMM 算法

- 1 **输入:** 张量数据 $\mathcal{P}_{\Omega_v}(\mathcal{M}^v)$, 参数 γ 和 λ 。设置 $l \leftarrow 0$ 。
 - 2 分别更新 \mathcal{X}^{l+1} , \mathcal{Z}^{l+1} , \mathcal{E}^{l+1} , \mathcal{G}^{l+1} , \mathcal{Y}^{l+1} , \mathcal{K}^{l+1} ;
 - 3 根据公式 (29) 更新拉格朗日乘子及惩罚参数;
 - 4 若满足停止准则, 则令 $\mathcal{X}^* := \mathcal{X}^{l+1}$, $\mathcal{E}^* := \mathcal{E}^{l+1}$; 否则, 令 $l \leftarrow l + 1$, 并返回步骤 2;
 - 5 **输出:** $\mathcal{X}^* = [\mathcal{X}^{1*}, \dots, \mathcal{X}^{V*}]$ 以及 $\mathcal{E}^* = [\mathcal{E}^{1*}, \dots, \mathcal{E}^{V*}]$ 。
-



收敛性分析

定理 18

设 $\{\mathcal{W}^l\}_{l=1}^{+\infty}$ 为算法 6 生成的迭代序列。若序列 $\{\mathcal{W}_2^l\}_{l=1}^{+\infty}$ 和 $\{\mathcal{X}^l\}_{l=1}^{+\infty}$ 是有界的, 则序列 $\{\mathcal{W}^l\}_{l=1}^{+\infty}$ 的任意聚点均满足问题 (28) 的 *KKT* 条件。



数值实验

- 数据重构评估指标

$$\text{MAPE} = \frac{1}{|\Omega^c|} \sum_{(ijk) \in \Omega^c} \left| \frac{x_{ijk} - \hat{x}_{ijk}}{x_{ijk}} \right| \times 100\%, \quad \text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{|\Omega^c|} \sum_{(ijk) \in \Omega^c} (x_{ijk} - \hat{x}_{ijk})^2}.$$

- 事件检测评估指标

- 事件漏检率**: 在官方事故报告时间之后的 15 分钟时间窗口内, 模型未能将实际发生的事故识别为异常事件的比例, 其计算公式为:

$$\text{漏检率} = \frac{\text{未被检测到的事故数量}}{\text{事故总数量}} \times 100\%.$$

- 整体分类能力**: ROC 曲线、AUC 值。
 - 检测延迟**: 模型检测到事件的时间与官方事故报告时间之间的差值, 其计算公式为:

$$\text{Detection Delay} = t_{\text{detected}} - t_{\text{incident}}.$$



数据重构

我们给出了两种不同的数据缺失场景。

- 随机缺失 (Random Missing, RM): 这个场景模拟由单个传感器故障或数据传输错误引起的零散数据缺失情况。
- 纤维缺失 (Fiber Missing, FM): 这个场景对应一种更有挑战性的非随机缺失情况, 用于模拟结构化的数据丢失。比如, 在所有检测器的相同时间特征位置上同时出现缺失, 以反映全网数据损坏或公共数据汇聚单元失效等实际情形。



表: 不同方法在随机缺失场景下的数据重构性能 (MAPE / RMSE)

| 数据集 | 场景 | 视图 / 指标 | BGCP | BATF | LRTC-TNN | LATC | IGNNK | MVLR | USCMT |
|---------|--------|---------|---------------|---------------|---------------|---------------------|-------------|---------------|-----------------------------|
| PeMS-D8 | RM-40% | 流量 | 11.05 / 25.97 | 12.14 / 26.36 | 8.86 / 21.90 | 8.62 / 20.87 | 14.26/28.83 | 8.74 / 21.57 | 8.58 / 20.94 |
| | | 占有率 | 15.43 / 1.71 | 16.51 / 1.55 | 10.76 / 1.21 | 10.63 / 1.14 | 20.69/1.54 | 10.83 / 1.18 | 9.64 / 1.07 |
| | | 速度 | 2.93 / 2.94 | 3.01 / 2.97 | 1.79 / 1.86 | 1.61 / 1.67 | 2.56/2.43 | 1.71 / 1.80 | 1.28 / 1.41 |
| | | 时间 (秒) | 257.45 | 215.63 | 96.19 | 247.96 | 74.12 | 69.83 | 16.27 |
| | RM-60% | 流量 | 10.85 / 26.35 | 12.59 / 27.49 | 9.19 / 23.38 | 8.85 / 21.74 | 17.74/33.71 | 9.08 / 22.78 | 8.65 / 21.44 |
| | | 占有率 | 15.49 / 1.74 | 16.67 / 1.96 | 11.54 / 1.34 | 11.43 / 1.25 | 25.64/1.64 | 12.17 / 1.41 | 9.84 / 1.12 |
| | | 速度 | 3.01 / 3.07 | 3.04 / 3.04 | 2.15 / 2.30 | 1.94 / 2.05 | 3.55/3.13 | 2.07 / 2.22 | 1.49 / 1.69 |
| | | 时间 (秒) | 191.14 | 212.20 | 92.40 | 198.14 | 63.21 | 86.09 | 18.24 |
| | RM-80% | 流量 | 11.31 / 27.60 | 13.53 / 28.57 | 10.37 / 26.89 | 9.91 / 24.30 | 25.65/40.41 | 10.65 / 26.51 | 9.38 / 23.60 |
| | | 占有率 | 17.82 / 2.64 | 18.34 / 2.46 | 12.87 / 1.53 | 13.45 / 1.51 | 32.94/2.05 | 16.71 / 2.40 | 10.86 / 1.37 |
| | | 速度 | 3.34 / 3.63 | 3.33 / 3.43 | 2.72 / 2.87 | 2.55 / 2.67 | 4.85/4.13 | 2.82 / 2.91 | 2.02 / 2.27 |
| | | 时间 (秒) | 164.77 | 165.07 | 75.70 | 192.28 | 62.46 | 57.08 | 24.71 |
| PeMS-D4 | RM-40% | 流量 | 16.33 / 32.18 | 17.32 / 32.96 | 12.90 / 26.54 | 12.68 / 25.88 | 19.06/36.14 | 12.89 / 26.43 | 12.10 / 25.79 |
| | | 占有率 | 27.20 / 1.71 | 27.31 / 1.72 | 16.61 / 1.35 | 16.33 / 1.29 | 29.74/1.58 | 17.00 / 1.32 | 14.79 / 1.19 |
| | | 速度 | 3.47 / 3.18 | 3.56 / 3.23 | 2.16 / 2.01 | 2.01 / 1.87 | 3.22/2.92 | 2.04 / 1.92 | 1.55 / 1.50 |
| | | 时间 (秒) | 302.49 | 328.24 | 92.01 | 268.83 | 123.79 | 125.52 | 27.86 |
| | RM-60% | 流量 | 16.54 / 32.20 | 18.15 / 33.32 | 13.44 / 27.62 | 13.16 / 26.70 | 27.85/42.00 | 13.48 / 27.43 | 12.34 / 26.36 |
| | | 占有率 | 27.51 / 1.75 | 26.47 / 1.80 | 17.90 / 1.45 | 17.57 / 1.39 | 37.14/1.92 | 18.56 / 1.48 | 15.23 / 1.26 |
| | | 速度 | 3.50 / 3.50 | 3.61 / 3.28 | 2.54 / 2.38 | 2.37 / 2.23 | 4.72/3.90 | 2.41 / 2.29 | 1.75 / 1.75 |
| | | 时间 (秒) | 292.05 | 279.69 | 100.94 | 304.73 | 78.04 | 107.99 | 31.47 |
| | RM-80% | 流量 | 17.03 / 32.95 | 18.74 / 34.65 | 14.67 / 30.63 | 14.31 / 28.69 | 27.36/43.99 | 15.18 / 30.09 | 13.46 / 28.10 |
| | | 占有率 | 30.26 / 2.21 | 30.33 / 2.13 | 20.12 / 1.71 | 20.34 / 1.67 | 47.37/2.19 | 24.15 / 2.26 | 17.89 / 1.54 |
| | | 速度 | 3.68 / 3.37 | 3.73 / 3.40 | 3.19 / 2.98 | 3.00 / 2.83 | 5.67/4.55 | 3.17 / 2.96 | 2.42 / 2.41 |
| | | 时间 (秒) | 297.09 | 309.72 | 97.57 | 320.67 | 119.91 | 105.58 | 37.35 |

最优结果以粗体标出

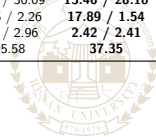


表: 不同方法在纤维缺失场景下的数据重构性能 (MAPE / RMSE)

| 数据集 | 场景 | 视图 / 指标 | BGCP | BATF | LRTC-TNN | LATC | IGNNK | MVLR | USCMT |
|---------|--------|---------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------------|
| PeMS-D8 | FM-40% | 流量 | 11.60 / 27.86 | 13.31 / 27.48 | 10.19 / 24.06 | 9.39 / 22.26 | 22.48/47.95 | 14.27 / 34.34 | 8.50 / 20.84 |
| | | 占有率 | 15.79 / 1.59 | 16.89 / 1.49 | 12.40 / 1.24 | 11.64 / 1.14 | 31.72/1.91 | 16.10 / 1.47 | 9.74 / 1.04 |
| | | 速度 | 3.24 / 3.15 | 3.08 / 3.03 | 2.08 / 2.10 | 1.76 / 1.79 | 4.64/3.90 | 2.37 / 2.38 | 1.33 / 1.46 |
| | | 时间 (秒) | 213.18 | 120.98 | 47.59 | 156.18 | 73.76 | 76.77 | 12.83 |
| | FM-60% | 流量 | 13.72 / 32.84 | 14.32 / 29.40 | 12.51 / 30.56 | 9.80 / 23.20 | 26.56/51.65 | 17.80 / 44.11 | 8.79 / 21.65 |
| | | 占有率 | 16.81 / 1.65 | 17.66 / 1.56 | 14.16 / 1.44 | 12.69 / 1.27 | 36.29/1.96 | 21.72 / 2.05 | 9.94 / 1.11 |
| | | 速度 | 4.41 / 3.88 | 3.18 / 3.14 | 3.11 / 5.52 | 2.08 / 2.11 | 6.66/5.43 | 3.09 / 3.09 | 1.43 / 1.59 |
| | | 时间 (秒) | 164.15 | 135.34 | 50.15 | 161.88 | 63.25 | 78.96 | 15.75 |
| | FM-80% | 流量 | 31.96 / 85.41 | 20.31 / 42.94 | 21.17 / 71.11 | 11.20 / 26.01 | 43.65/70.66 | 27.23 / 80.21 | 9.42 / 23.45 |
| | | 占有率 | 21.89 / 2.00 | 24.29 / 2.05 | 22.53 / 2.40 | 15.79 / 1.55 | 48.72/2.57 | 33.58 / 3.15 | 11.14 / 1.40 |
| | | 速度 | 14.41 / 11.50 | 3.78 / 3.83 | 5.75 / 10.00 | 2.85 / 2.85 | 7.81/6.08 | 8.46 / 14.05 | 2.01 / 2.27 |
| | | 时间 (秒) | 166.61 | 229.37 | 59.41 | 187.42 | 62.46 | 113.35 | 23.14 |
| PeMS-D4 | FM-40% | 流量 | 17.41 / 33.48 | 18.00 / 33.65 | 14.35 / 28.89 | 13.46 / 27.19 | 27.21/45.56 | 22.16 / 42.45 | 12.03 / 25.91 |
| | | 占有率 | 29.45 / 1.75 | 25.57 / 1.69 | 18.05 / 1.38 | 17.35 / 1.28 | 40.97/1.65 | 24.07 / 1.75 | 14.88 / 1.15 |
| | | 速度 | 3.65 / 3.27 | 3.61 / 3.28 | 2.47 / 2.24 | 2.13 / 1.97 | 5.03/4.19 | 3.04 / 2.70 | 1.51 / 1.48 |
| | | 时间 (秒) | 400.15 | 274.82 | 96.38 | 282.79 | 124.06 | 174.67 | 26.69 |
| | FM-60% | 流量 | 19.48 / 35.56 | 19.35 / 34.48 | 16.28 / 32.59 | 13.90 / 27.50 | 38.48/61.74 | 25.69 / 50.71 | 12.29 / 26.43 |
| | | 占有率 | 30.56 / 1.79 | 28.08 / 1.77 | 21.16 / 1.72 | 19.55 / 1.47 | 48.50/2.16 | 33.64 / 2.33 | 15.46 / 1.26 |
| | | 速度 | 4.40 / 3.80 | 3.73 / 3.36 | 3.29 / 2.96 | 2.59 / 2.40 | 8.15/6.66 | 4.41 / 3.95 | 1.72 / 1.70 |
| | | 时间 (秒) | 464.47 | 470.10 | 172.86 | 462.05 | 80.30 | 146.30 | 37.88 |
| | FM-80% | 流量 | 38.93 / 56.12 | 35.83 / 50.33 | 26.98 / 66.54 | 20.15 / 52.16 | 42.30 / 70.12 | 39.30 / 97.22 | 13.54 / 28.16 |
| | | 占有率 | 44.14 / 2.30 | 42.91 / 2.19 | 31.12 / 2.43 | 25.48 / 1.75 | 60.37 / 2.40 | 46.15 / 3.32 | 18.30 / 1.54 |
| | | 速度 | 12.70 / 10.24 | 4.37 / 3.93 | 6.91 / 10.28 | 3.60 / 3.26 | 7.95 / 6.19 | 9.50 / 12.99 | 2.43 / 2.42 |
| | | 时间 (秒) | 428.73 | 726.77 | 197.53 | 537.08 | 108.80 | 223.39 | 64.96 |

最优结果以粗体标出

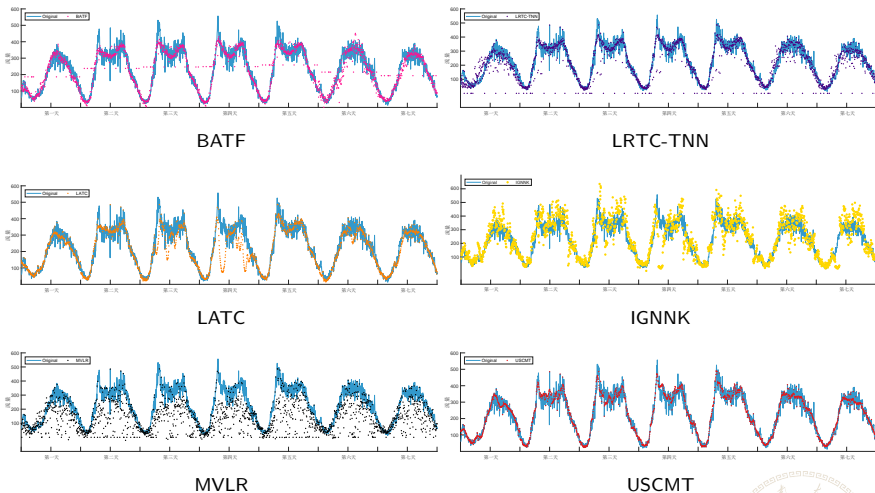


图: 不同方法在 PeMS-D4 数据集 1 号检测器一周流量时间序列重构效果的可视化



事件检测

表: 不同方法在异常检测任务中的 AUC 值

| 视图 | iForest | MLP | RTC | MVLR | USCMT |
|-----|---------|--------|--------|--------|---------------|
| 流量 | 0.5469 | 0.6941 | 0.5883 | 0.5124 | 0.7270 |
| 占有率 | 0.7077 | 0.6294 | 0.7095 | 0.6590 | 0.7270 |
| 速度 | 0.5632 | 0.7084 | 0.5976 | 0.6925 | 0.7270 |

最优结果以粗体标出



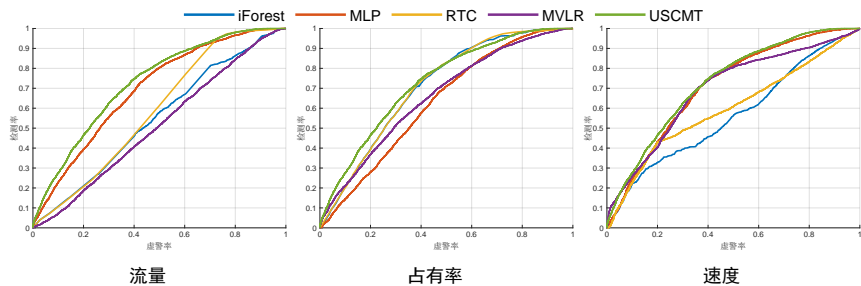


图: 不同方法在不同交通视图下的 ROC 曲线



表: 不同方法在不同虚警率条件下的事件报告延迟 (均值 \pm 标准差) 及漏检率

| FPR (%) | iForest | | MLP | | RTC | | MVLR | | USCMT | |
|---------|------------------------------------|--------------|------------------|--------------|------------------------------------|--------------|------------------------------------|--------------|------------------------------------|--------------|
| | 延迟 (min) | 漏检率 | 延迟 (min) | 漏检率 | 延迟 (min) | 漏检率 (%) | 延迟 (min) | 漏检率 | 延迟 (min) | 漏检率 |
| 流量 | | | | | | | | | | |
| 1 | -2.17 \pm 5.98 | 61.36 | -1.66 \pm 6.26 | 52.27 | -2.09 \pm 5.85 | 61.36 | -0.40 \pm 5.07 | 72.73 | -1.80 \pm 5.44 | 52.27 |
| 2.5 | -5.17 \pm 6.72 | 31.82 | -4.14 \pm 7.86 | 27.27 | -5.08 \pm 6.62 | 31.82 | -1.44 \pm 6.00 | 59.09 | -4.70 \pm 7.09 | 36.36 |
| 5 | -7.05 \pm 7.38 | 18.18 | -5.86 \pm 8.16 | 20.45 | -7.02 \pm 7.36 | 18.18 | -3.10 \pm 7.66 | 27.27 | -6.97 \pm 6.38 | 25.00 |
| 占有率 | | | | | | | | | | |
| 1 | -1.61 \pm 6.66 | 43.18 | -0.03 \pm 4.92 | 81.82 | 0.00 \pm 0.00 | 100.00 | -1.82 \pm 6.61 | 50.00 | -1.80 \pm 5.44 | 52.27 |
| 2.5 | -3.68 \pm 6.64 | 36.36 | -0.61 \pm 5.61 | 63.64 | 0.00 \pm 0.00 | 100.00 | -3.95 \pm 7.03 | 27.27 | -4.70 \pm 7.09 | 36.36 |
| 5 | -6.86 \pm 6.90 | 29.55 | -5.01 \pm 7.05 | 15.91 | -7.39 \pm 7.25 | 27.27 | -6.13 \pm 7.33 | 15.91 | -6.97 \pm 6.38 | 25.00 |
| 速度 | | | | | | | | | | |
| 1 | -0.28 \pm 4.17 | 86.36 | -0.14 \pm 6.31 | 63.64 | 0.42 \pm 2.94 | 81.82 | -1.31 \pm 4.92 | 72.73 | -1.80 \pm 5.44 | 52.27 |
| 2.5 | -0.77 \pm 6.65 | 59.09 | -3.31 \pm 7.64 | 43.18 | -1.59 \pm 6.20 | 38.64 | -1.41 \pm 6.20 | 47.73 | -4.70 \pm 7.09 | 36.36 |
| 5 | -2.50 \pm 7.61 | 50.00 | -5.33 \pm 8.00 | 34.09 | -5.14 \pm 7.02 | 18.18 | -3.45 \pm 6.65 | 34.09 | -6.97 \pm 6.38 | 25.00 |

最优结果以粗体标出



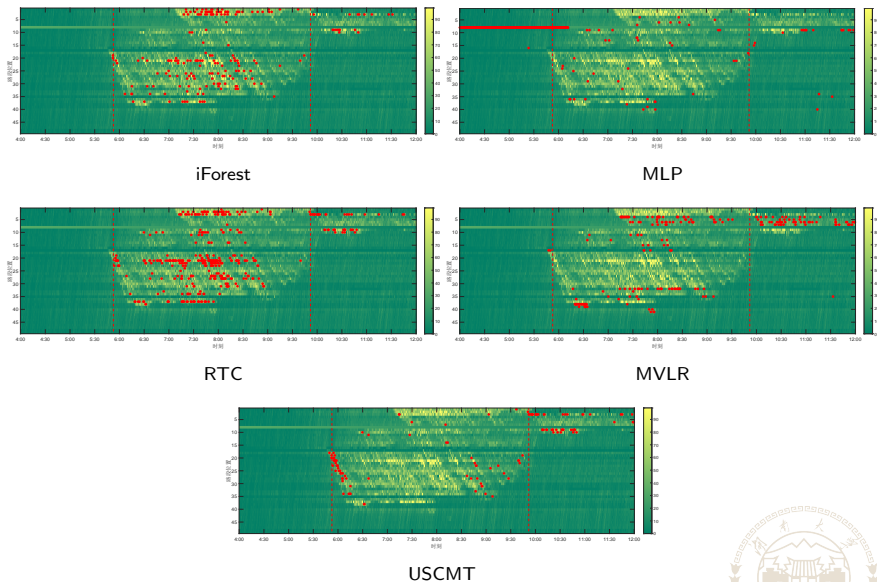


图: 不同方法在真实交通事故事件中的检测结果可视化



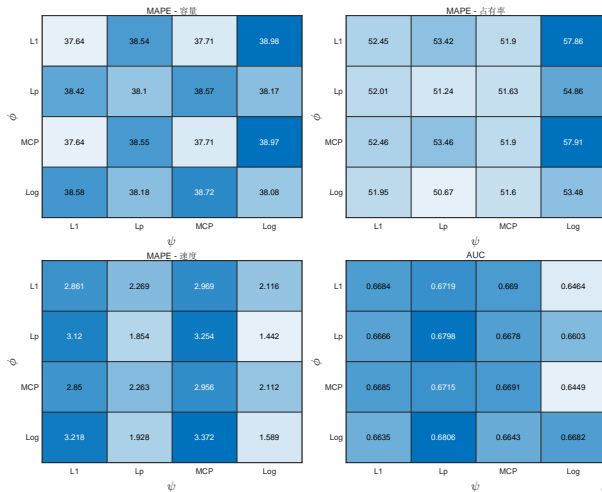
联合重构与检测

表: 不同方法在数据重构与异常检测联合任务中的综合性能

| 场景 | 视图 / 指标 | RTC | | | MVLR | | | USCMT | | |
|--------|---------|-------|------|--------|--------|------|---------------|--------------|-------------|---------------|
| | | MAPE | RMSE | AUC | MAPE | RMSE | AUC | MAPE | RMSE | AUC |
| RM-40% | 流量 | 44.29 | 3.01 | 0.5075 | 43.10 | 2.63 | 0.6010 | 38.52 | 2.35 | 0.6854 |
| | 占有率 | 61.06 | 8.31 | 0.5115 | 66.96 | 8.08 | 0.5947 | 51.77 | 7.07 | 0.6854 |
| | 速度 | 3.04 | 2.40 | 0.5008 | 3.12 | 1.88 | 0.6166 | 1.99 | 1.40 | 0.6854 |
| | 时间 (秒) | 99.04 | | | 319.79 | | | 54.89 | | |
| RM-60% | 流量 | 44.94 | 3.04 | 0.5041 | 43.31 | 2.64 | 0.5951 | 39.61 | 2.42 | 0.6758 |
| | 占有率 | 62.73 | 8.89 | 0.5178 | 67.22 | 8.40 | 0.6212 | 52.67 | 7.32 | 0.6758 |
| | 速度 | 5.68 | 4.32 | 0.5040 | 5.27 | 3.09 | 0.6385 | 2.56 | 1.78 | 0.6758 |
| | 时间 (秒) | 92.37 | | | 258.65 | | | 55.12 | | |
| FM-40% | 流量 | 40.71 | 2.57 | 0.5348 | 43.96 | 2.69 | 0.5807 | 38.60 | 2.41 | 0.6113 |
| | 占有率 | 58.77 | 8.64 | 0.5770 | 68.74 | 8.37 | 0.5995 | 50.09 | 7.27 | 0.6113 |
| | 速度 | 8.61 | 4.97 | 0.5959 | 6.94 | 4.16 | 0.6228 | 2.56 | 1.68 | 0.6113 |
| | 时间 (秒) | 95.82 | | | 394.85 | | | 62.26 | | |
| FM-60% | 流量 | 41.77 | 2.75 | 0.5234 | 44.35 | 2.70 | 0.5813 | 39.90 | 2.44 | 0.5939 |
| | 占有率 | 57.12 | 9.53 | 0.5645 | 68.90 | 8.85 | 0.5879 | 52.21 | 7.52 | 0.5939 |
| | 速度 | 12.48 | 7.01 | 0.5260 | 9.98 | 5.85 | 0.5795 | 3.92 | 2.48 | 0.5939 |
| | 时间 (秒) | 86.37 | | | 295.28 | | | 55.89 | | |

最优结果以粗体标出

非凸松弛函数的有效性

图: 函数 ϕ 与 ψ 的敏感性分析结果图

时空模块的有效性

表: 时空 (ST) 模块的消融实验结果

| 场景 | 流量 | | | | 占有率 | | | | 速度 | | | |
|--------|--------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------------|-------------|--------|-------------|-------------|-------------|
| | MAPE | | RMSE | | MAPE | | RMSE | | MAPE | | RMSE | |
| | w/o ST | w/ ST | w/o ST | w/ ST | w/o ST | w/ ST | w/o ST | w/ ST | w/o ST | w/ ST | w/o ST | w/ ST |
| RM-40% | 12.01 | 12.00 | 25.60 | 25.60 | 14.44 | 14.48 | 1.16 | 1.16 | 1.55 | 1.54 | 1.51 | 1.51 |
| RM-60% | 12.29 | 12.26 | 26.40 | 26.34 | 15.17 | 15.15 | 1.25 | 1.25 | 1.82 | 1.75 | 1.77 | 1.74 |
| RM-80% | 13.79 | 13.48 | 28.50 | 28.28 | 18.87 | 18.10 | 1.56 | 1.52 | 2.64 | 2.44 | 2.54 | 2.41 |
| FM-40% | 12.21 | 12.18 | 25.38 | 25.37 | 14.62 | 14.60 | 1.16 | 1.16 | 1.56 | 1.54 | 1.50 | 1.49 |
| FM-60% | 12.64 | 12.30 | 26.65 | 26.42 | 15.95 | 15.52 | 1.23 | 1.23 | 2.62 | 1.70 | 2.74 | 1.68 |
| FM-80% | 14.65 | 13.68 | 28.73 | 28.29 | 20.64 | 18.21 | 1.64 | 1.56 | 10.13 | 2.33 | 8.32 | 2.32 |

最优结果以粗体标出



统一多视图多任务框架的有效性

表: 不同框架策略下数据重构与异常检测联合任务的综合性能

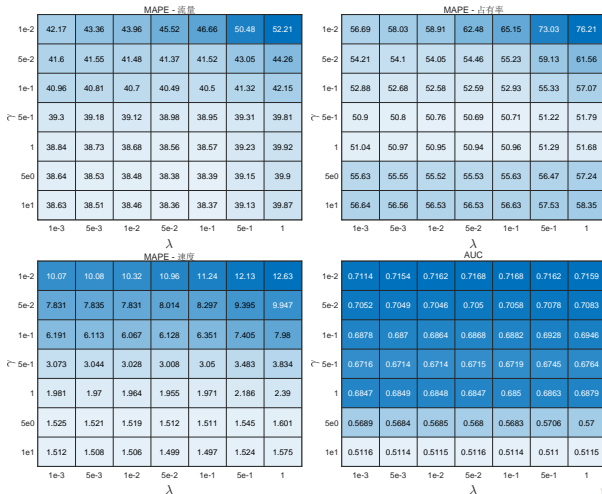
| 方法 | 流量 | | 占有率 | | 速度 | | AUC |
|----|--------------|-------------|--------------|-------------|-------------|-------------|---------------|
| | MAPE | RMSE | MAPE | RMSE | MAPE | RMSE | |
| SS | 40.54 | 2.52 | 61.82 | 7.24 | 2.90 | 2.07 | 0.5748 |
| US | 40.53 | 2.52 | 60.74 | 7.15 | 2.31 | 1.71 | 0.5762 |
| SM | 39.94 | 2.50 | 59.59 | 7.11 | 2.76 | 2.01 | 0.5533 |
| UM | 39.92 | 2.50 | 58.73 | 7.02 | 2.28 | 1.70 | 0.5914 |

最优结果以粗体标出

- 顺序单视图多任务 (Sequential Single-view Multi-task, SS) 框架
- 统一单视图多任务 (Unified Single-view Multi-task, US) 框架
- 顺序多视图多任务 (Sequential Multi-view Multi-task, SM) 框架



参数分析

图: 超参数 λ 与 γ 的敏感性分析结果图

本章小结

本章针对多源交通数据中的信息孤岛与任务脱节问题，提出了一种**统一时空耦合多视图张量 (USCMT) 模型**。主要工作与创新点总结如下：

- **模型构建**：创新性地将多源数据重构与事件检测在单一框架下**统一建模**。设计了耦合融合机制以联合约束跨视图的**子空间一致性**与**异常共享稀疏性**，并引入时空平滑正则项与广义非凸松弛函数精确刻画数据的物理结构。
- **理论保障**：证明了基于**张量积 (t-product)** 的模型在保留高维多源数据结构上显著优于传统的矩阵化方法。
- **算法设计**：设计了高效的迭代求解算法，并在给出了算法的收敛性分析。
- **实验验证**：大量实验证实，USCMT 成功打破了“数据孤岛”，其不仅在联合重构与检测任务上全面超越了现有的双任务框架，在各自单任务的表现上也优于专门的单任务模型，展现出卓越的性能与鲁棒性。



目录

- 1 绪论
- 2 主要研究工作
- 3 结论与展望**
- 4 攻读学位期间的学术或实践成果



本文系统研究了张量低秩稀疏分解的非凸建模、结构正则化及其高效求解算法。主要成果如下：

- **成果一：基于字典约束的广义非凸背景表示学习模型 (GNBRL)**
 - **模型构建：** 引入广义非凸函数精确刻画低秩与稀疏成分，结合**三维相关全变分正则化**实现字典学习与异常检测的统一优化，并设计了“由粗到精”两阶段框架。
 - **理论与算法：** 建立了严格的**误差界分析**；构建了高效的外推线性化交替方向乘法 (ELADMM) 并证明了其收敛性。
- **成果二：基于分层张量分解的光谱-空间联合检测框架 (LTD)**
 - **模型构建：** 构建光谱与空间协同分解层面，有效降低大规模张量的计算复杂度，实现异常信息的全面表征。
 - **理论与算法：** 首次从理论上证明了**张量管秩与组稀疏正则化 (TGSR)** 的等价关系。据此提出带验证机制的自适应秩削减策略，彻底规避了大规模奇异值分解 (SVD)。



- **成果三：数据驱动的张量字典学习鲁棒图像对齐模型 (DTDL)**
 - **模型构建：** 将张量分解为低维系数与三个字典矩阵的乘积以降低参数规模，并引入**广义超拉普拉斯正则化**以保持图像局部结构特征。
 - **算法设计：** 针对非线性空间变换，构建了外层**广义高斯-牛顿法**与内层**邻近线性化ADMM**的**双层嵌套求解策略**，并从理论上证明了算法收敛性。
- **成果四：统一时空耦合多视图张量模型 (USCMT)**
 - **模型构建：** 突破单变量孤立建模局限。设计**双重跨视图耦合机制**（低秩一致性与异常并发稀疏性），并在统一框架下嵌入时空正则化约束。
 - **应用与求解：** 成功应用于智能交通系统，实现多源数据重构与异常事件检测的相互增强；设计了高效交替求解算法并提供了收敛性保障。



谢谢各位评审专家!

敬请批评指正

